ISSN 2686-679X

ВЕСТНИК РГГУ

Серия
«Информатика.
Информационная безопасность.
Математика»

Научный журнал

RSUH/RGGU BULLETIN

“Information Science.
Information Security. Mathematics”
Series

Academic Journal

Основан в 2018 г.
Founded in 2018

1
2020

VESTNIK RGGU. Seriya «Informatica. Informatsionnaya bezopasnost. Matematica»

RSUH/RGGU BULLETIN. “Information Science. Information Security. Mathematics” Series
Academic Journal

There are 4 issues of the printed version of the journal a year.

Founder and Publisher
Russian State University for the Humanities (RSUH)

RSUH/RGGU BULLETIN. “Information Science. Information Security. Mathematics” series is included: in the Russian Science Citation Index; in the List of leading scientific journals and other editions for publishing PhD research findings peer-reviewed publications fall within the following research area:

20.00.00 Informatics

81.03.29 Information security, data protection

27.00.00 Mathematics

Objectives and areas of research

RSUH/RGGU BULLETIN. “Information Science. Information Security. Mathematics” series publishes the results of research by scientists from RSUH and other universities and other Russian and foreign academic institutions. The areas covered by contributions include theoretical and applied computer science, up-to-date IT, means and technologies of information protection and information security as well as the issues of theoretical and applied mathematics including analytical and imitation models of different processes and objects. Special emphasis is put on articles and reviews covering research in indicated directions in the areas of social and humanitarian problems and also issues of personnel training for these directions.

RSUH/RGGU BULLETIN. “Information Science. Information Security. Mathematics” series is registered by Federal Service for Supervision of Communications Information Technology and Mass Media. 25.05.2018, reg. No. FS77-72977

Editorial staff office: 6, Miusskaya sq., Moscow, Russia, 125993

tel: +7 (916) 250-90-85

e-mail: adkozlov@mail.ru

ВЕСТНИК РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика»

Научный журнал
Выходит 4 номера печатной версии журнала в год.
Учредитель и издатель – Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ)

ВЕСТНИК РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика» включен: в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ); в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

20.00.00 Информатика

81.93.29 Информационная безопасность, защита информации

27.00.00 Математика

Цели и область

В журнале «Вестник РГГУ», серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика» публикуются результаты научных исследований ученых и специалистов РГГУ, а также других университетов и научных учреждений России и зарубежных стран. Направления публикаций включают теоретическую и прикладную информатику, современные информационные технологии, методы, средства и технологии защиты информации и обеспечения информационной безопасности, а также проблемы теоретической и прикладной математики, включая разработку аналитических и имитационных моделей процессов и объектов различной природы. Особое внимание уделяется статьям и обзорам, посвященным исследованиям по указанным направлениям в области социальных и гуманитарных проблем, а также вопросам подготовки кадров по соответствующим специальностям для данных направлений.

ВЕСТНИК РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика» зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций 25.05.2018 г., регистрационный номер ПИ № ФС77-72977.

Адрес редакции: 125993, Россия, Москва, Миусская пл., 6

Тел: +7 (916) 250-90-85

электронный адрес: adkozlov@mail.ru

Founder and Publisher
Russian State University for the Humanities (RSUH)

Учредитель и издатель
Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ)

Ответственный за выпуск:

А.Д. Козлов, кандидат технических наук, доцент (РГГУ)

CONTENTS

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 004
DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-8-24

Научные кластеры России в области информационных технологий

Валерий В. Арутюнов
Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия, warut698@yandex.ru

Наталия В. Гришина
Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия, grnat@rambler.ru

Аннотация. В работе анализируется научная деятельность российских организаций в области базовых направлений информационных технологий, основу которых составляют информатика, автоматика и вычислительная техника, кибернетика и связь. Проведен анализ результатов деятельности 25 научно-исследовательских организаций и высших учебных заведений Российской Федерации. На основе наукометрических показателей (публикационной активности, индексов Хирша и др.) из базы данных Российского индекса научного цитирования сформированы 6 территориальных научных кластеров России по 4 научным направлениям. В этих кластерах выявлены организации-лидеры в соответствующих отраслях научных знаний, отличающиеся высокими показателями цитируемости, индекса Хирша и востребованности результатов работ. Выявлено соотношение между потоками публикаций, зарегистрированных в Российском индексе научного цитирования, и аналогичными потоками в системе World of Science. Обнаружен факт, что мировое научное сообщество недополучает значительный объем научных знаний, приобретенных российскими исследователями.

Ключевые слова: информационные технологии, научный кластер, информатика, автоматика и вычислительная техника, связь, кибернетика, публикационная активность, результативность научной деятельности

Для цитирования: Арутюнов В.В., Гришина Н.В. Научные кластеры России в области информационных технологий // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2020. № 1. С. 8–24. DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-8-24

Scientific Russian clusters in the field of information technologies

Valerii V. Arutyunov
Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia, warut698@yandex.ru

Natalia V. Grishina
Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia, grnat@rambler.ru

Abstract. The paper analyzes the scientific activities of Russian organizations in the field of basic areas in information technologies, which backbone are the computer science, automation and computer technology, cybernetics and communications. The analysis was made for the activity results of 25 research organizations and higher educational institutions in the Russian Federation. Following the scientometric figures (publication activity, Hirsch indices, etc.) from the database of the Russian scientific citation index 6 territorial scientific clusters of Russia in 4 scientific areas were formed. In those clusters the leading organizations were identified for the relevant fields of scientific knowledge, characterized by high citation rates, Hirsch and demand for the results of work. The relationship between the streams of publications registered in the Russian Science Citation Index and similar streams in the World of Science system is revealed. The fact is discovered that the world scientific community is not receiving a significant amount of scientific knowledge obtained by Russian researchers.

Keywords: information technologies, scientific cluster, computer science, automation and computer engineering, communication, cybernetics, publication activity, scientific performance

For citation: Arutyunov, V.V., Grishina, N.V. (2020), "Scientific Russian clusters in the field of information technologies", *RSUH/RGGU Bulletin. "Information Science. Information Security. Mathematics" Series,* no. 1, pp. 8–24, DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-8-24

Введение

Важнейший и существенный вклад в развитие информационных технологий в XXI в. внесли следующие научные направления: автоматика и вычислительная техника, информатика, кибернетика и связь. При этом развитие и совершенствование указанных направлений происходило такими стремительными темпами, которые не могли предсказать многие специалисты.

Естественно, такой прогресс развития мог произойти только на «подготовленной» почве. В истории развития нашей цивилизации обычно выделяют четыре этапа кардинальных изменений в сфере обработки информации, которые привели к революционным преобразованиям, в том числе и общественных отношений. Это появление письменности и книгопечатания, открытие электричества и изобретение микропроцессорных технологий. Таким образом, человечество веками готовило предпосылки для создания и развития информационных технологий (ИТ).

Задача информационного развития общества впервые была поставлена в Японии еще в 1972 г. (*Masuda Y.* The Information Society as Postindustrial Society. Wash.: World Future Soc., 1983, p. 29). Примерно в то же время американский социолог Д. Белл в книге «Наступление постиндустриального общества. Опыт социального прогноза», изданной в 1973 г., выделил в истории человеческого общества три стадии – аграрную, индустриальную и постиндустриальную.

Американский философ Э. Тоффлер (книга «Третья волна», 1980 г.) рассматривает историю человеческой цивилизации в виде волн, следующих друг за другом.

> Первая волна – «сельскохозяйственная цивилизация» и ее символ «мотыга», сменяется «цивилизацией индустриальной», символом которой является конвейер, а на смену ей приходит третья волна – «информационная цивилизация», символ которой – компьютер. Движущая сила первой волны – продукция сельского хозяйства и минеральные ресурсы, конвейер обеспечивает дешевый труд и массовое производство, а движущая сила третьей волны – создание и эксплуатация знаний [Тоффлер 2004].

В настоящее время информация во всех развитых странах является важнейшим ключевым ресурсом экономической, научной, политической и социальной жизни. При этом развитие ИТ в первую очередь связано с ускорением процессов получения, обработки, распространения и использования обществом новых знаний.

Приказом Минэкономразвития России от 27.06.2016, № 400 О приоритетном проекте Минэкономразвития России «Развитие инновационных кластеров – лидеров инвестиционной привлекательности мирового уровня», «Стратегией развития отрасли информационных технологий в Российской Федерации на 2014–2020 гг. и на перспективу до 2025 г.», утвержденной распоряжением Правительства Российской Федерации от 01 ноября 2013 г., № 2036-р «Об утверждении Стратегии развития отрасли информационных технологий в Российской Федерации на 2014–2020 гг. и на перспективу до 2025 г.», были утверждены стратегии развития территориальных инновационных кластеров информационных технологий на территории Санкт-Петербурга, Томской области, Орловской области и др.

В рамках выполнения проекта 18-07-00036А РФФИ [Арутюнов, Гришина 2018] была поставлена задача: проанализировать публикационную активность ученых и специалистов и востребованность итогов их работ в ряде естественнонаучных отраслей, в том числе в сфере информатики, автоматики и вычислительной техники, связи и кибернетики как составляющих компонент ИТ, с целью выявления организаций и персоналий – лидеров в соответствующей отрасли знаний (в том числе с учетом территориального признака исследований).

Указанный анализ проводился в соответствии с выбранными наукометрическими показателями:

- индекс востребованности I_v;
- индекс цитируемости I_c;
- индекс Хирша I_h.

Индекс востребованности определяется соотношением $I_v = I_c / I_p$ (I_p – индекс публикационной активности) и позволяет выявить, насколько цитируемые результаты работ представляют интерес для научного сообщества. Примеры использования указанных индексов для оценки эффективности эрготехнических систем и определения рейтинга цитируемости российских ученых по версии РИНЦ приводятся в работах [Арутюнов 2014, Арутюнов 2015].

Ниже анализируются некоторые итоги выполненного в 2018–2019 гг. исследования на основе базы РИНЦ [РИНЦ 2018], дифференцированные по отраслевым и территориальным научным кластерам.

Информатика

Научный кластер организаций в области информатики представлен на рис. 1.

В данной научной области выделяются организации таких городов и регионов, как Москва, Санкт-Петербург, Московская область, Новосибирск и Краснодар.

Как следует из рис. 1, Научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт информатизации, автоматизации и связи на железнодорожном транспорте (НИИАС, Москва) является абсолютным лидером по всем трем показателям: $I_v = 28$; максимальные индексы $I_c = 28179$ и $I_h = 96$.

При этом по индексу цитируемости – ближайшие показатели у Новосибирского Института ядерной физики им. Г.И. Будкера Сибирского отделения РАН ($I_c = 6201$) и Санкт-Петербургского государственного университета ($I_c = 6000$); другими словами, индекс цитируемости для Института и университета меньше I_c для НИИАС в 4,5 раза.

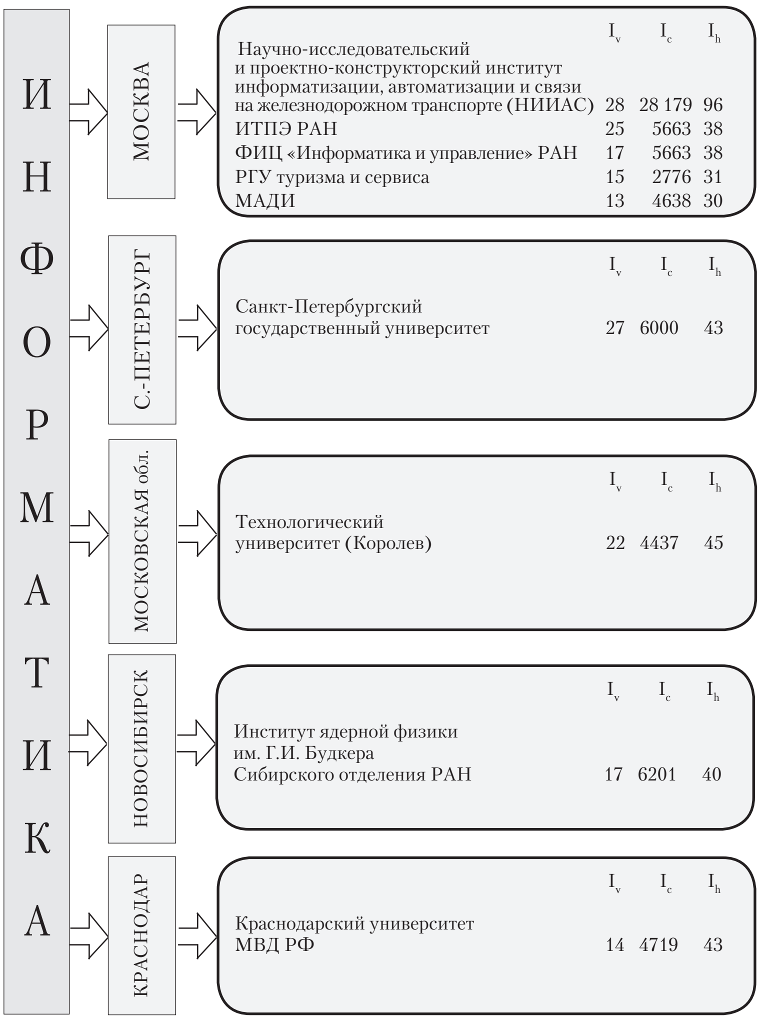

Рис. 1. Научный кластер организаций в области информатики

По индексу востребованности таких резких отличий для организаций не наблюдается.

У ряда организаций значения показателя востребованности приближаются к максимальному значению I_v для данной отрасли. В их числе Санкт-Петербургский государственный университет ($I_v = 27$), Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН (ИТПЭ) ($I_v = 25$), Технологический университет (Королев, Московская обл.) ($I_v = 22$).

Если индекс цитируемости определяет научную влиятельность автора цитируемой публикации, то индекс Хирша определяет продуктивность автора, и его высокое значение позволяет прогнозировать, что автор и в дальнейшем сможет регулярно публиковать итоги своих работ, востребованные научным сообществом.

Индекс Хирша для НИИАС существенно выделяется на фоне остальных организаций. Ближайшее значение I_h для Технологического университета (Королев, Московская область) и Санкт-Петербургского университета более чем в 2 раза меньше.

Автоматика и вычислительная техника

Научный кластер организаций в области автоматики и вычислительной техники приводится на рис. 2.

Как следует из рисунка, активно функционирующие в данной отрасли организации расположены в четырех городах: Москве, Санкт-Петербурге, Воронеже и Пензе.

Здесь также абсолютным лидером являются московские организации: Институт проблем управления им. Трапезникова РАН и Научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт информатизации, автоматизации и связи на железнодорожном транспорте (НИИАС), которые являются лидерами по всем трем индексам (I_v, I_c и I_h), а также Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, ФИЦ «Информатика и управление» и ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН.

Высокие значения цитируемости и индекса Хирша характерны для Института ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН ($I_c = 12529, I_h = 48$) и Пензенского государственного университета ($I_c = 8546, I_h = 37$).

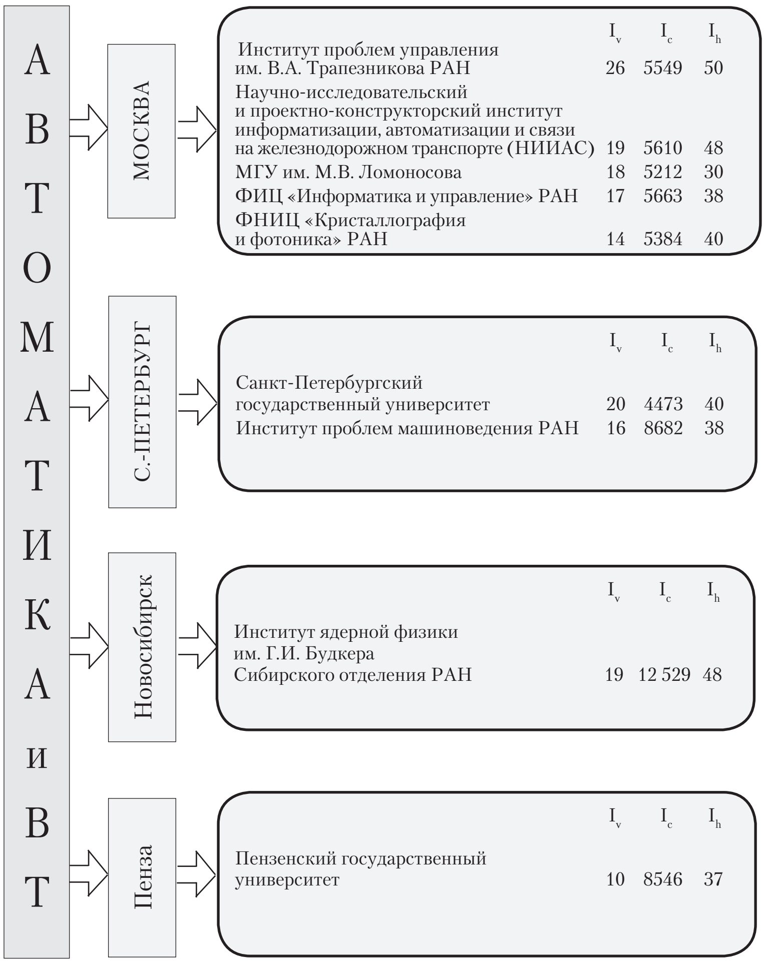

Рис. 2. Научный кластер организаций
в области автоматики и вычислительной техники

Связь

Эта отрасль выделяется среди других рассмотренных в первую очередь тем, что лидером по всем рассматриваемым индексам являются организации Воронежа (рис. 3). При этом для Воронежского института высоких технологий отмечаются максимальные значения индексов в этой отрасли: $I_v = 12$; $I_c = 3828$; $I_h = 38$.

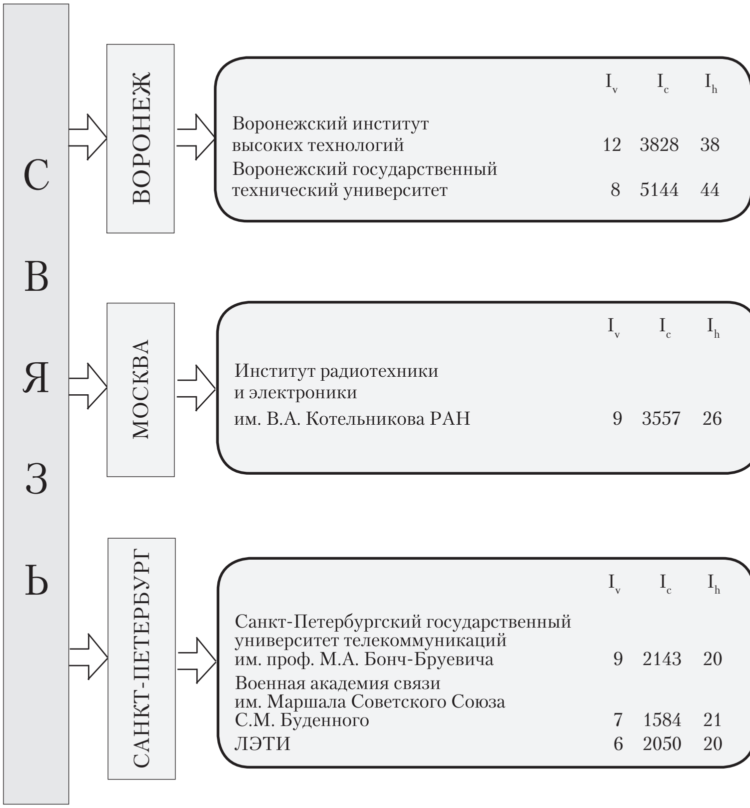

Рис. 3. Научный кластер организаций в области связи

В число лидеров этой отрасли входят также организации Москвы и Санкт-Петербурга. В их числе Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч- Бруевича, Военная академия связи им. Маршала Советского Союза С.М. Буденного и Ленинградский электротехнический институт (ЛЭТИ).

Следует отметить, что значения индексов Хирша для указанных организаций при этом свидетельствуют, что в данных организациях работают ученые, чей уровень активности научной деятельности соответствует мировому, хотя он и уступает соответствующим значениям I_h в области информатики, а также автоматики и вычислительной техники (рис. 1 и 2).

Кибернетика

Научный кластер организаций в области кибернетики представлен на рис. 4.

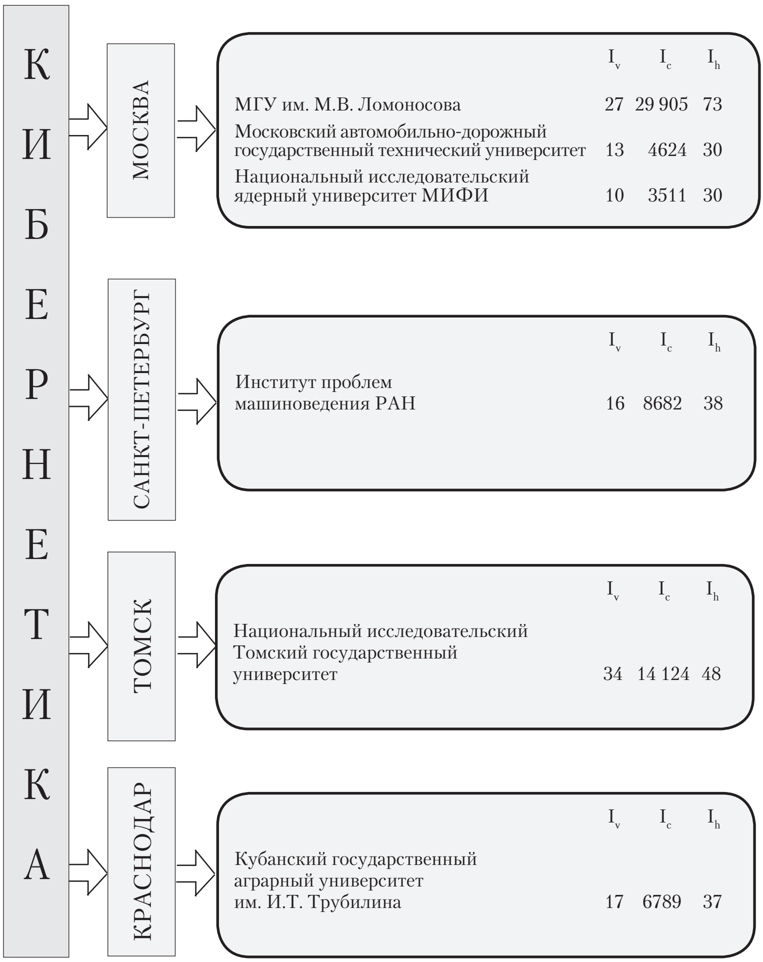

Рис. 4. Научный кластер организаций в области кибернетики

В данной отрасли по уровню востребованности итогов научных работ выделяются организации четырех городов: Москвы, Санкт-Петербурга, Томска и Краснодара. Самые незаурядные результаты отмечаются у ученых Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (I_v = 27; I_c = 29905; I_h = 73) и Национального исследовательского Томского государственного университета (I_v = 34; I_c = 14124; I_h = 48).

В данной отрасли также следует отметить Санкт-Петербургский Институт проблем машиноведения РАН (I_v = 16; I_c = 8682; I_h = 38) и Кубанский государственный аграрный университет им. И.Т. Трубилина (I_v = 17; I_c = 6789; I_h = 37).

Подводя итоги научной активности ученых в рассмотренных отраслях, можно отметить, что из всех рассмотренных организаций максимальный индекс востребованности отмечается у ученых Национального исследовательского Томского государственного университета в области кибернетики (I_v = 34).

Лидером по индексу цитируемости является МГУ им. М.В. Ломоносова в области кибернетики (I_c = 29905). Приближается к этому показателю НИИАС в области информатики (I_c = 28179).

Наибольшие индексы Хирша отмечаются в области информатики в НИИАС (I_h = 96) и кибернетики в МГУ им. М.В. Ломоносова (I_h = 73).

Территориальные научные кластеры в области информационных технологий

Выполненное исследование позволило выявить шесть основных территориальных научных кластеров России в области информационных технологий: Московский, Санкт-Петербургский, Томский, Новосибирский, Воронежский и Краснодарский.

На рис. 5 показан Московский кластер в области информационных технологий.

Именно для организаций Москвы отмечаются высокие значения индексов I_v, I_c и I_h в области информатики, кибернетики, автоматики и вычислительной техники.

В Томске (рис. 6) у Национального исследовательского Томского государственного университета наблюдается наивысшее значение показателя востребованности I_v в области кибернетики, а также высокие значения индексов цитируемости и Хирша.

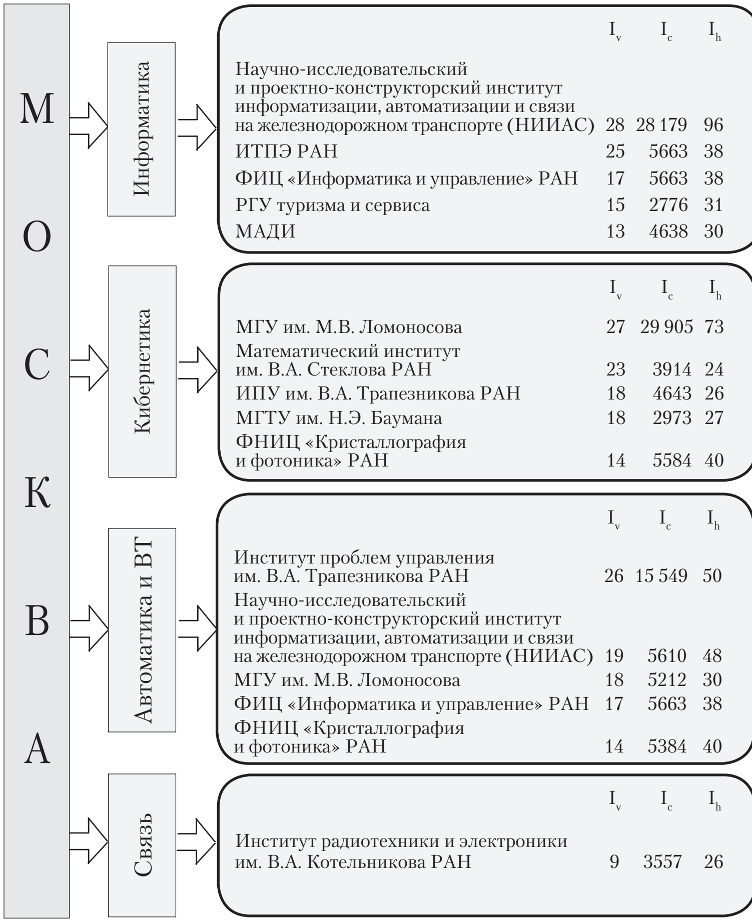

Рис. 5. Московский научный кластер в области информационных технологий

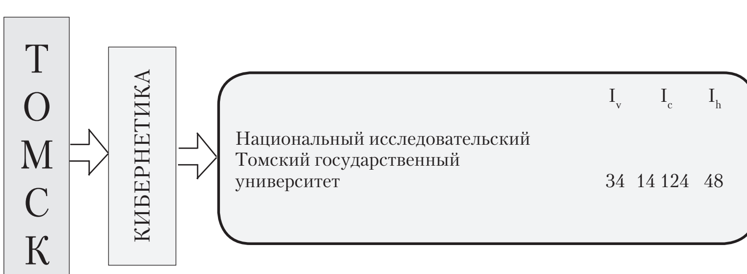

Рис. 6. Томский научный кластер в области кибернетики

По сравнению с московским научным кластером организации Санкт-Петербурга отличаются более скромными наукометрическими показателями для всех рассматриваемых четырех отраслей знаний (рис. 7). Здесь можно выделить Санкт-Петербургский государственный университет в области информатики, автоматики и вычислительной техники, а также Институт проблем машиноведения РАН в области кибернетики с $I_c = 8682$ и $I_h = 38$.

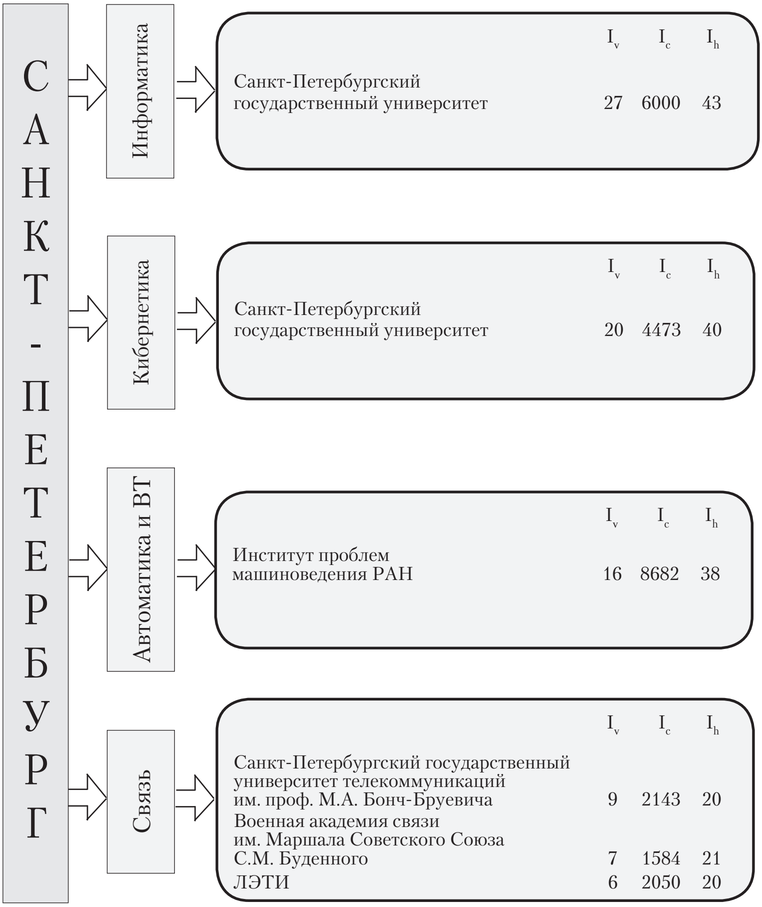

Рис. 7. Научный кластер Санкт-Петербурга в сфере информационных технологий

В Новосибирском научном кластере (рис. 8) выделяются два основных направления: автоматика и вычислительная техника, информатика. В области автоматики и вычислительной техники лидирует Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН с показателями I_v = 18, I_c = 12 529, I_h = 48. Этот же Институт демонстрирует высокие показатели в области информатики: I_v = 17, I_c = 6201, I_h = 40.

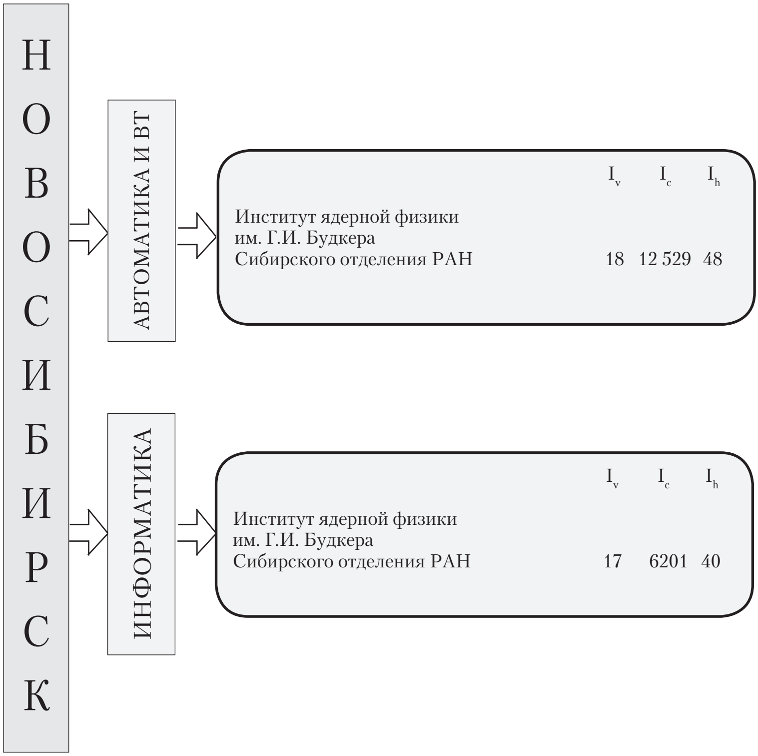

Рис. 8. Новосибирский научный кластер в области информационных технологий

Если в научном кластере Краснодара выделяются по одной организации в области информатики и кибернетики (рис. 9), то в воронежском кластере (рис. 10), как отмечалось выше, выявлены две организации: Воронежский институт высоких технологий и Воронежский государственный университет, лидирующие в области связи с высокими показателями востребованности, цитируемости и индекса Хирша.

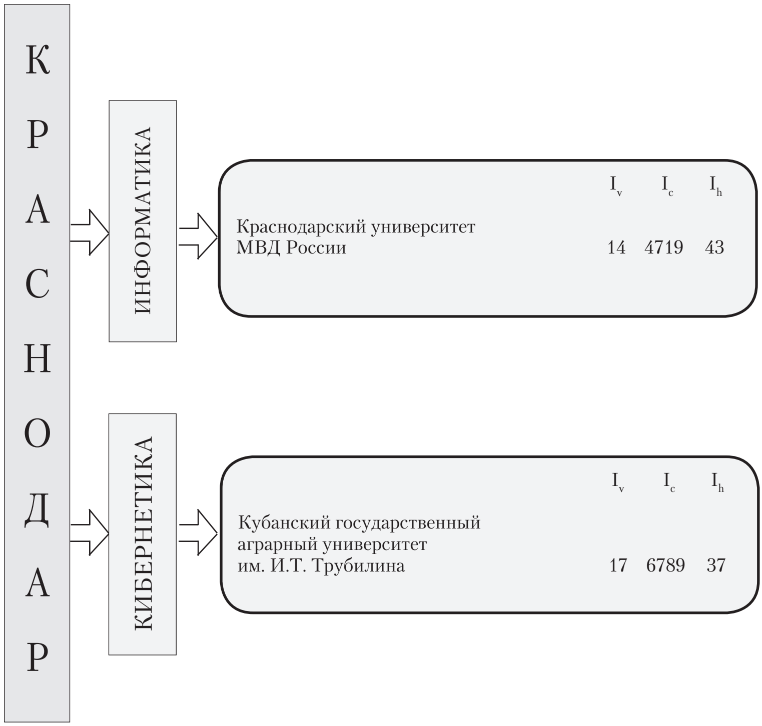

Рис. 9. Краснодарский научный кластер
в области кибернетики и информатики

Рис. 10. Воронежский научный кластер в области связи

Заключение

По итогам выполненного исследования для всех четырех базовых направлений ИТ (информатики, автоматики и вычислительной техники, связи и кибернетики) выявлены организации-лидеры, отличающиеся высокими показателями востребованности итогов исследований, отраженных в публикациях, а также максимальными индексами цитируемости и Хирша.

При этом максимальный индекс востребованности отмечается у Национального исследовательского Томского государственного университета в области кибернетики ($I_v = 34$).

Лидером по индексу цитируемости является МГУ им. М.В. Ломоносова в области кибернетики ($I_c = 29\,905$). Приближается к этому показателю НИИАС в области информатики ($I_c = 28\,179$).

Максимальные индексы Хирша отмечались в области информатики в НИИАС ($I_h = 96$) и в сфере кибернетики в МГУ им. М.В. Ломоносова ($I_h = 73$).

По результатам исследования сформированы шесть основных территориальных научных кластеров России в области ИТ: Московский, Санкт-Петербургский, Томский, Новосибирский, Воронежский и Краснодарский, организации в которых отличаются высокими значениями индексов востребованности I_v, цитируемости I_c и Хирша I_h.

Для организаций Москвы отмечаются высокие значения индексов I_v, I_c и I_h в области информатики, кибернетики, автоматики и вычислительной техники.

Томский научный кластер лидирует в области кибернетики по показателю востребованности, Воронежский по этому индексу – в области связи.

Сравнительный анализ потоков публикаций в 2013–2017 гг. по четырем вышеуказанным отраслям в РИНЦ и WoS также показал, что в области связи и кибернетики ежегодные потоки публикаций в РИНЦ в два и более раз превышают аналогичные потоки в системе WoS. Так как в РИНЦ отражаются в основном публикации и цитируемость российских исследователей, указанный факт может свидетельствовать о том, что мировое научное сообщество недополучает значительный объем научных знаний, полученных российскими исследователями.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 18-07-00036 А.

This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant № 18-07-36 А.

Литература

Арутюнов 2014 – *Арутюнов В.В.* Показатели эффективности эрготехнических систем // Научные и технические библиотеки. 2014. № 6. С. 5–14.

Арутюнов 2015 – *Арутюнов В.В.* Особенности рейтинга цитируемости российских ученых по версии РИНЦ // Научные и технические библиотеки. 2015. № 5. С. 28–43.

Арутюнов, Гришина 2018 – *Арутюнов В.В., Гришина Н.В.* Оценка результативности научной деятельности российских ученых: кластерный анализ (на примере естественнонаучных отраслей) // Научные и технические библиотеки. 2018. № 9. С. 76–91.

РИНЦ 2018 – РИНЦ (Российский индекс научного цитирования). URL: https://elibrary.ru/querybox.asp?scope=newquery (дата обращения 20 янв. 2018).

Тоффлер 2004 – *Тоффлер Э.* Третья волна. М.: АСТ, 2004. 781 с.

References

Arutyunov, V.V. (2014), “Indicators of the ergotechnical systems effectiveness”, *Nauchnye i tekhnicheskie biblioteki*, vol. 6, pp. 5–14.

Arutyunov, VV. (2015), “Features of the citation rating of Russian scientists according to the RSCI”, *Nauchnye i tekhnicheskie biblioteki*, vol. 5, pp. 28–43.

Arutyunov, V.V. and Grishina, N.V. (2018), “Evaluation of the effectiveness in scientific performance of Russian scientists. Cluster analysis (by the example of natural Sciences)”, *Nauchnye i tekhnicheskie biblioteki*, vol. 9, pp. 77–92.

RSCI (2018), Russian Science Citation Index. URL: https://elibrary.ru/querybox.asp?scope=newquery (Accessed 20 January 2018).

Toffler, E. (2004), *Tretya volna* [Third wave]. AST, Moscow, Russia.

Информация об авторах

Валерий В. Арутюнов, доктор технических наук, профессор, Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия; 125993, Россия, Москва, Миусская пл., д. 6; warut698@yandex.ru

Наталия В. Гришина, кандидат технических наук, доцент, Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия; 125993, Россия, Москва, Миусская пл., д. 6; grnat@rambler.ru

Information about the authors

Valerii V. Arutyunov, Dr. of Sci. (Computer Science), professor, Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia; bld. 6, Miusskaya Sq., Moscow, Russia, 125993; warut698@yandex.ru

Natalia V. Grishina, Cand. of Sci. (Computer Science), associate professor, Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia; bld. 6, Miusskaya Sq., Moscow, Russia, 125993; grnat@rambler.ru

УДК 004.054
DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-25-38

Разработка системы автоматизированного тестирования UEFI-драйверов с пользовательским интерфейсом

Александра А. Артамонова
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия, artamonova.a@yahoo.com

Андрей В. Куров
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия, avkur7@mail.ru

Аннотация. Тестирование программного обеспечения представляет собой один из самых критически важных этапов разработки и является необходимым для обеспечения качества конечного продукта. Инструменты автоматизированного тестирования позволяют существенно упростить и ускорить этот процесс. Однако при создании низкоуровневых систем, например при разработке драйверов устройств и приложений, работающих под UEFI-BIOS, системы автоматизированного тестирования используются достаточно редко, что связано с несоответствием среды выполнения и среды разработки и отсутствием готовых универсальных решений в этой области. В статье рассматривается аппаратная и программная реализация универсальной системы автоматизированного тестирования UEFI-драйверов с пользовательским интерфейсом, позволяющая проводить функциональное тестирование разрабатываемого программного обеспечения непосредственно на целевой аппаратной платформе. Основная идея предлагаемого метода заключается в разработке UEFI-приложения, которое перед запуском тестируемого драйвера будет заменять стандартные консоли ввода и вывода на пользовательские, сохраняющие функционал стандартных консолей в полном объеме и в дополнение к этому обеспечивающие дублирование информации между целевой материнской платой и связанным с ним вспомогательным устройством. Использование системы позволит проводить тестирование в среде, достаточно изолированной от среды выполнения программного обеспечения. Кроме того, программная реализация системы не зависит от тестируемого драйвера, что обеспечивает ее универсальность. Предлагаемый метод применим для испытания UEFI-драйверов с пользовательским интерфейсом, позволяющих оценить их работоспособность по анализу состояния консолей ввода-вывода.

Ключевые слова: UEFI, UEFI-приложение, автоматизированное тестирование

Для цитирования: Артамонова А.А., Куров А.В. Разработка системы автоматизированного тестирования UEFI-драйверов с пользовательским интерфейсом // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2020. № 1. С. 25–38. DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-25-38

Development of an automated testing system for the user interface UEFI drivers

Aleksandra A. Artamonova
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia,
artamonova.a@yahoo.com

Andrei V. Kurov
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia,
avkur7@mail.ru

Abstract. Software testing is one of the most critical stages of development that is necessary to ensure the quality of the final product. Automated testing tools can significantly simplify and speed up the development process. But in low-level context such as UEFI-BIOS drivers and applications development, automated testing systems are not widely used. That is mainly due to the fact that the software runtime and the developer's workstation are different, as well as to the lack of ready-made universal solutions. The paper presents the hardware and software implementation of a universal system for automated tests of UEFI drivers with a user interface, which allows to perform functional testing of the developed software directly on the target hardware platform. The main idea of the proposed method is to create an UEFI application that replaces the standard input and output consoles by custom ones before running the test driver. Those custom consoles copy the complete functionality of standard consoles and also provide duplication of information between the target motherboard and the associated additional device. Using the system will allow testing in an environment that is sufficiently isolated from the software runtime environment. In addition, the software implementation of the system does not depend on the driver under test that ensures its versatility. The offered method is applicable for testing the user interface UEFI drivers that use input and output consoles and allow checking those drivers for errors by analyzing the state of the consoles.

Keywords: UEFI, UEFI-application, automated testing

For citation: Artamonova, A.A., Kurov, A.V. (2020), “Development of an automated testing system for the user interface UEFI drivers”, *RSUH/RGGU Bulletin. “Information Science. Information Security. Mathematics”* Series, no. 1, pp. 25–38, DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-25-38

Введение

Тестирование программного обеспечения представляет собой один из самых критически важных этапов разработки и является необходимым для обеспечения качества конечного продукта. В течение многих лет по мере хода развития программной сферы и эволюции цикла разработки предлагались различные методики тестирования и создавались разнообразные инструменты, автоматизирующие те или иные фазы тестирования. Такие инструменты позволяют существенно ускорить и упростить процесс разработки, так как избавляют от необходимости проводить рутинную работу, обеспечивают воспроизводимость сценариев тестирования и не имеют риска допустить случайные ошибки. Однако при создании низкоуровневых систем, например при разработке драйверов устройств и приложений, работающих под UEFI-BIOS, системы автоматизированного тестирования используются достаточно редко [Gomes 2016]. Основной причиной можно назвать несоответствие среды, в которой должен выполняться код, и платформы, используемой при его разработке. Хотя многие компоненты низкоуровневых программных систем зачастую однозначно определяются спецификацией используемых протоколов, что может существенно снизить сложность проектирования, проведение тестирования все еще остается необходимым процессом для своевременного выявления ошибок и обеспечения корректной работы системы. Кроме того, функциональность низкоуровневых систем нередко отличается в зависимости от используемого аппаратного оборудования, что заставляет проводить один и тот же набор тестовых сценариев на разных платформах. Отсюда вытекает актуальность создания автоматизированной системы для проведения функциональных тестов на целевом оборудовании.

Можно выделить два основных подхода к проведению автоматического тестирования UEFI-приложений и драйверов [Gomes 2016]: создание тестового приложения, которое будет выполняться на целевой аппаратной платформе для непосредственной проверки функционала системы, или разработка утилиты, которая будет имитировать базовые функции UEFI-среды, что позволит проводить тестирование на платформе, отличной от целевой. Хотя второй подход предполагает меньшее время проведения тестирования, обеспечивая при этом проверку логической корректности функционала, в данной работе отдается предпочтение первому варианту, так как только выполнение полноценных сценариев тестирования непосредственно на целевом оборудовании может с удовлетворительной точностью гарантировать работу разрабатываемого программного обеспечения на этой аппаратной платформе при реальной эксплуатации.

Перед разработкой системы автоматизированного тестирования, выполняющей тестовые сценарии непосредственно на целевой аппаратной платформе, необходимо решить ряд вопросов. Во-первых, среда выполнения такой системы должна быть максимально изолирована от среды выполнения тестируемого программного обеспечения, в противном же случае гарантировать корректность его функциональности при реальной эксплуатации будет нельзя. Во-вторых, существенным преимуществом системы автоматизированного тестирования будет независимость ее программной реализации от тестируемого приложения или драйвера с целью обеспечения повторного использования программного кода – в самом благоприятном случае в зависимости от тестируемого программного обеспечения должен меняться только набор тестовых сценариев. В данной работе описывается реализация метода создания системы автоматизированного тестирования UEFI-драйверов, обладающей вышеперечисленными преимуществами.

Основная идея предлагаемого метода заключается в разработке UEFI-приложения, заменяющего перед запуском тестируемого UEFI-драйвера стандартные консоли ввода и вывода в глобальной системной таблице (global System Table, gST) на пользовательские, которые сохраняют функционал стандартных консолей в полном объеме и в дополнение к этому обеспечивают дублирование информации между целевой материнской платой и связанным с ним вспомогательным устройством. Таким образом, вся информация, отправляемая тестируемым драйвером на стандартную консоль ввода, будет приниматься этим устройством, а посылаемые с устройства данные будут обрабатываться драйвером так, как будто бы они были введены непосредственно с клавиатуры, подключенной к целевой материнской плате. Понятно, что такая система подходит только для тестирования UEFI-драйверов с пользовательским интерфейсом, т. е. использующих консоли ввода и вывода и позволяющих оценить свою работоспособность по анализу их состояния, и не будет пригодна для проверки функциональности программного обеспечения другого типа (например, драйверов устройств).

Аппаратная реализация системы

Основными аппаратными компонентами системы являются: материнская плата, на которой проводится запуск тестируемого программного обеспечения, плата преобразователя интерфейса USB-UART и плата с USB-входом, на которой будет происходить получение информации о текущем состоянии консоли вывода целевой материнской платы и отправка сценариев тестирования.

В данной работе для реализации аппаратной составляющей системы были использованы: материнская плата отечественного производителя AQH310CM, одноплатный компьютер Raspberry Pi 3 Model B v1.2 и плата расширения ARPI600 для подключения к Raspberry Pi. Выбор этих компонентов осуществлялся из соображений доступности – они могут быть заменены на аналогичные с минимальными изменениями программного кода разрабатываемого UEFI-приложения. ARPI600 подключается к материнской плате посредством кабеля USB – microUSB, а к Raspberry Pi – посредством GPIO-интерфейса. На ARPI600 устанавливаются перемычки P_RX и CP_TX, P_TX и CP_RX соответственно для подключения USB-UART к последовательному порту Raspberry Pi (рис. 1).

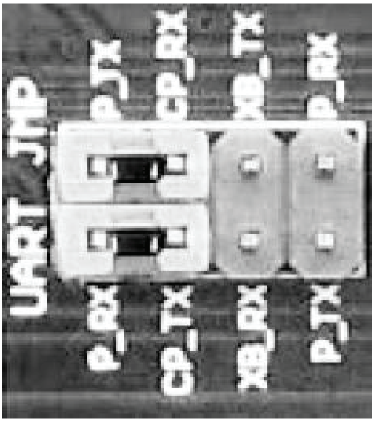

Рис. 1. Установка перемычек на ARPI600 [Waveshare n.d.]

Перед началом работы на SD-карту, используемую в Raspberry Pi, устанавливается операционная система Raspbian[1],

[1] Raspbian [Электронный ресурс]. URL: https://www.raspbian.org (дата обращения 14 января 2020).

производится ее необходимая конфигурация и устанавливаются требуемые драйвера в соответствии с руководством пользователя ARPI600 [Waveshare n.d.].

Программная реализация системы

Программный код UEFI-BIOS является модульным и состоит из различных пакетов, включающих в себя набор модулей и связанных с ними определений [Tianocore 2018], [Kedlaya 2014]. Такая структура удобна для восприятия и облегчает повторное использование кода. Каждый пакет может включать в себя следующие корневые каталоги: *Include*, *Library*, *Application*, *Drivers*. Каталог *Include* содержит все заголовочные файлы, предоставляемые этим пакетом, которые могут быть использованы в других проектах. Каталог *Library* включает в себя каталоги каждой из библиотек модуля. В каталоге *Application* находятся, соответственно, каталоги для каждого UEFI-приложения в составе пакета, и, наконец, каталог *Drivers* содержит каталоги для каждого UEFI-драйвера в составе пакета. Структура разрабатываемого пакета представлена на рис. 2.

UEFI-приложение представляет собой бинарный файл, который может быть загружен для выполнения определенной задачи и выгружен по завершении выполнения этой задачи [Tianocore n.d.].

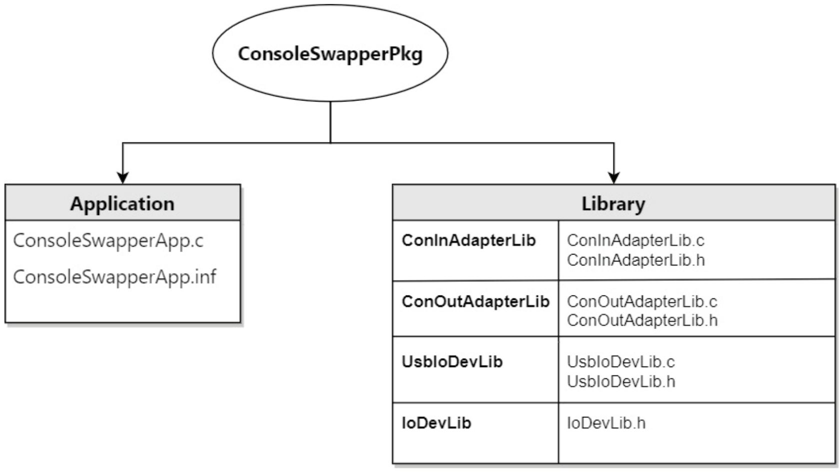

Рис. 2. Структура пакета ConsoleSwapperPkg

В данном случае UEFI-приложение после запуска будет заменять стандартные консоли ввода и вывода в глобальной системной таблице, обеспечивая дублирование информации между вспомогательным устройством и средой выполнения приложения, загружать тестируемый драйвер и выгружать его после завершения тестирования. Файл исходного кода *ConsoleSwapperApp.c* написан на языке C; он содержит основную точку входа в приложение и вызов необходимых функций для его работы. Информационный файл *ConsoleSwapperApp.inf* используется инструментами сборки для получения информации о пакете [Tianocore 2019].

Библиотеки *ConInAdapterLib*, *ConOutAdapterLib*, *IoLib* и *UsbIo DevLib* предоставляют, соответственно, функционал для работы с экземплярами пользовательской консолью ввода и вывода, экземпляром устройства ввода-вывода и экземпляром устройства USB. Схема работы приложения представлена на рис. 3 и рис. 4.

Поиск USB-устройства осуществляется по идентификатору производителя (Vendor Identifier, VID) и идентификатору продукта (Product Identifier, PID). В зависимости от выбранных аппаратных компонентов системы автоматизированного тестирования может потребоваться произвести конфигурацию найденного USB-устройства. Конфигурация ARPI600 включает в себя отправку команды активации интерфейса CP2102 в соответствии со спецификацией установленного на нем чипсета CP2010 [Silicon Labs 2010] путем вызова функции UsbControlTransfer() с необходимыми параметрами.

Если USB-устройство было успешно найдено и сконфигурировано, приложение может продолжить свою работу, создав экземпляр устройства ввода-вывода IoDev. Для IoDev определены две функции – чтения и записи. Для работы с единственным поддерживаемым USB-устройством реализация чтения и записи заключается в вызове функции UsbBulkTransfer() с необходимыми параметрами. Такая структура упрощает добавление при необходимости поддержки других физических интерфейсов (например, COM-порта).

ConInAdapter является реализацией пользовательской консоли ввода, основанной на EFI_SIMPLE_TEXT_INPUT_PROTOCOL, а ConOutAdapter, соответственно, реализацией пользовательской консоли вывода, основанной на EFI_SIMPLE_TEXT_OUTPUT_PROTOCOL.

Часть функций протоколов остается без изменения, а часть дополняется пользовательским функционалом, необходимым для осуществления обмена содержимого консолей между Raspberry Pi и целевой материнской платой.

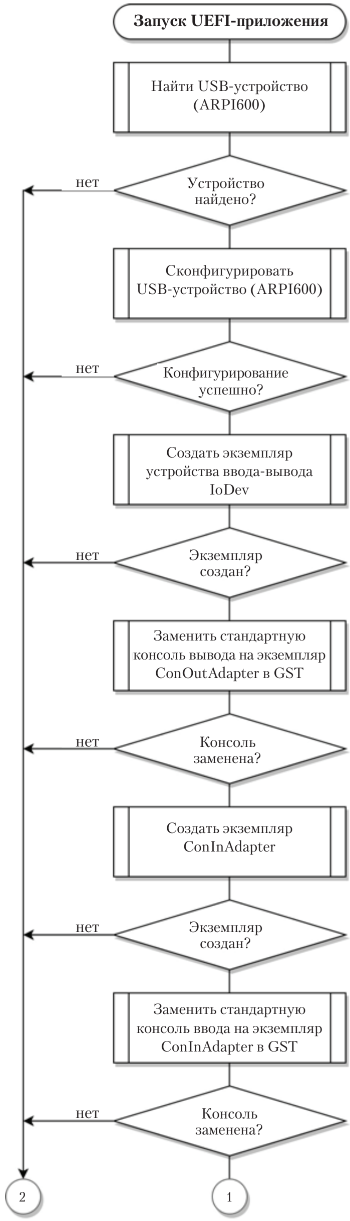

Рис. 3. Схема работы приложения ConsoleSwapperApp. *Часть 1*

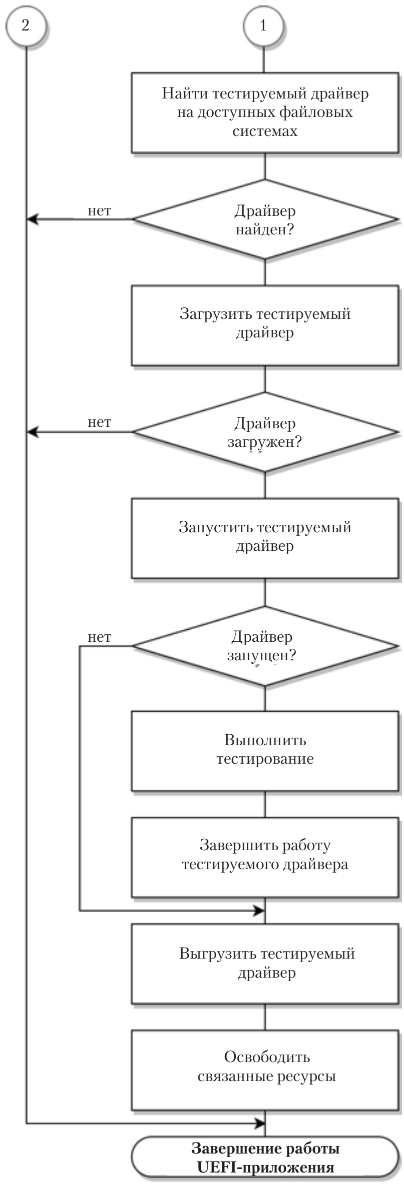

Рис. 4. Схема работы приложения ConsoleSwapperApp.
Часть 2

Пользовательская реализация функций ConOutAdapter главным образом относится к переводу сообщений, выводимых на консоль тестируемым программным обеспечением, в управляющие последовательности ANSI в соответствии со спецификацией UEFI 2.7 [Unified Extensible Firmware 2017] и отправке их на вспомогательное устройство посредством вызова функции записи созданного экземпляра IoDev, а пользовательская реализация функций ConInAdapter касается чтения управляющих последовательностей в том же формате из буфера, связанного со вспомогательным устройством посредством вызова функции чтения экземпляра IoDev, переводе их в соответствующие скан-коды и символы клавиш и отправки их на стандартную консоль ввода для имитации нажатия клавиш пользователем.

Файл образа UEFI-драйвера должен располагаться на доступном носителе, например на USB-накопителе или подключенном жестком диске, после чего он может быть загружен в системную память при помощи службы загрузки LoadImage() и запущен с использованием службы загрузки StartImage() [Weimin 2008]. Таким образом, после замены консолей в системной таблице UEFI-приложение может выполнить попытку поиска драйвера на доступных накопителях, в случае успеха загрузить и запустить его, а после завершения работы драйвера осуществить его выгрузку из памяти и освободить остальную выделенную память.

Опытная проверка

Для проверки системы автоматизированного тестирования был подготовлен простой UEFI-драйвер, который после загрузки и запуска выводит на стандартную консоль вывода сообщение “Hello”, после чего переходит в режим ожидания нажатия клавиши. При нажатии клавиши Enter драйвер очищает стандартную консоль вывода, отправляет на нее сообщение “World”, ждет 5 секунд и завершает свою работу; нажатие остальных клавиш игнорируется. Тестовый драйвер с расширением *.efi* был помещен на USB-накопитель, подключенный к тестируемой материнской плате AQH310CM, после чего на ней было запущено приложение *ConsoleSwapperApp.efi*, программная реализация которого была описана ранее.

Кроме того, было создано небольшое приложение на языке Python, запускаемого на Raspberry Pi. При помощи библиотеки pyserial[2] оно определяет наличие устройства по адресу */dev/ttyAMA0*, которым является ARPI600, отправляет заранее заготовленное сообщение, содержащее инструкцию нажатия клавиши Enter в виде управляющей последовательности ANSI на это устройство, а затем читает данные, выведенные драйвером после обработки полученной команды на стандартную консоль и отправленные на ARPI600. Эта информация сравнивается с также заранее подготовленным «эталонным» состоянием консоли. Если в ответе содержится сообщение “World”, можно сделать вывод о том, что тестируемый драйвер работает корректно, в обратном же случае можно заключить, что его функциональность нарушена. Результат сравнения выводится на экран (“OK” или “ERROR”).

Результат проверки системы автоматизированного тестирования оказался успешным. Приложение на языке Python отправило на материнскую плату с загруженным тестовым драйвером и запущенным приложением *ConsoleSwapperApp* команду нажатия клавиши Enter, убедилось в выводе на стандартную консоль сообщения “World” и вывело на экран результат проверки (“OK”).

Заключение

Инструменты автоматизированного тестирования позволяют значительно ускорить процесс разработки программного обеспечения и повысить качество конечного продукта. В статье рассматривается аппаратная и программная реализация универсальной системы автоматизированного тестирования UEFI-драйверов с пользовательским интерфейсом, позволяющая проводить функциональное тестирование разрабатываемого программного обеспечения непосредственно на целевой аппаратной платформе. Основная идея предлагаемого метода заключается в разработке UEFI-приложения, которое перед запуском тестируемого драйвера будет заменять стандартные консоли ввода и вывода на пользовательские, сохраняющие функционал стандартных консолей в полном объеме и в дополнение к этому обеспечивающие дублирование информации между целевой материнской платой и связанным с ним вспомогательным устройством.

---

[2] PyPi: Pyserial Project [Электронный ресурс] // Python Software Foundation.URL: https://pypi.org/project/pyserial (дата обращения 14 января 2020).

Использование системы позволит проводить тестирование в среде, достаточно изолированной от среды выполнения программного обеспечения. Кроме того, программная реализация системы не зависит от тестируемого драйвера, что обеспечивает ее универсальность. Однако она подходит только для испытания UEFI-драйверов с пользовательским интерфейсом, позволяющих оценить их работоспособность по анализу состояния консолей ввода-вывода, и не будет пригодна для проверки функциональности программного обеспечения другого типа (например, драйверов устройств).

Литература

Gomes, Amora, Teixeira, Lima, Brito, Ciocari, Machado 2016 – *Gomes E.C., Amora P.R., Teixeira E.M., Lima A.G., Brito F.T., Ciocari J.F, Machado J.C.* UTTOS: A Tool for Testing UEFI Code in OS Environment // 28th International Conference on Testing Software and Systems (ICTSS-2016), 17–19 October, 2016. Graz, 2016. P. 218–224.

Kedlaya, Bhagyalakshmi 2014 – *Kedlaya G., Bhagyalakshmi H.R.* Design and Implementation of GPIO Enumeration Library and Application for UEFI-BIOS // International Journal of Scientific Engineering and Technology. 2014. Vol. 3, no. 5. P. 524–528.

Silicon Labs 2010 – Silicon Labs, AN571: CP210x Virtual COM Port Interface [Электронный ресурс]. URL: https://www.silabs.com/documents/public/application-notes/AN571.pdf (дата обращения 14 января 2020).

Tianocore n.d. – Tianocore, Creating a Shell Application [Электронный ресурс] // GitHub, Inc. URL: https://github.com/tianocore/tianocore.github.io/wiki/Creating-a-Shell-Application (дата обращения 14 января 2020).

Tianocore 2018 – Tianocore, EDK II Driver Writer's Guide for UEFI 2.3.1 [Электронный ресурс]. URL: https://legacy.gitbook.com/download/pdf/book/edk2-docs/edk-ii-uefi-driver-writer-s-guide (дата обращения 14 января 2020).

Tianocore 2019 – Tianocore, EDK II Module Information (INF) File Specification [Электронный ресурс]. URL: https://www.gitbook.com/download/pdf/book/edk2-docs/edk-ii-inf-specification (дата обращения 14 января 2020).

Unified Extensible Firmware 2017 – Unified Extensible Firmware Interface Specification Version 2.7. [Электронный ресурс]. URL: http://www.uefi.org/sites/default/files/resources/UEFI_Spec_2_7.pdf (дата обращения 14 января 2020).

Waveshare n.d. – Waveshare, ARPI600 User Manual [Электронный ресурс]. URL: https://uamper.com/products/datasheet/arpi600_user_manual.pdf (дата обращения 14 января 2020).

Wei-min, Peng, Han 2008 – *Wei-min T., Peng S., Han Z.* Design and implementation of UsbKey device driver based on Extensible Firmware Interface // 9th International Conference on Signal Processing, Beijing, 26–29 October 2008. Beijing, 2008. P. 2833–2836.

References

Gomes, E.C., Amora, P.R., Teixeira, E.M., Lima, A.G., Brito, F.T., Ciocari, J.F. and Machado, J.C. (2016), "UTTOS: A Tool for Testing UEFI Code in OS Environment", *28th International Conference on Testing Software and Systems (ICTSS-2016),* 17–19 October 2016, Graz, Austria, pp. 218–224.

Kedlaya, G. and Bhagyalakshmi, H.R. (2014), "Design and Implementation of GPIO Enumeration Library and Application for UEFI-BIOS", *International Journal of Scientific Engineering and Technology*, vol. 3, no. 5, pp. 524–528.

Silicon Labs, AN571: CP210x Virtual COM Port Interface (2010), [Online], available at: https://www.silabs.com/documents/public/application-notes/AN571.pdf (Accessed 14 Jan 2020).

Tianocore, Creating a Shell Application, *GitHub, Inc.* [Online], available at: https://github.com/tianocore/tianocore.github.io/wiki/Creating-a-Shell-Application (Accessed 14 Jan 2020).

Tianocore, EDK II Driver Writer's Guide for UEFI 2.3.1 (2018), [Online], available at: https://legacy.gitbook.com/download/pdf/book/edk2-docs/edk-ii-uefi-driver-writer-s-guide (Accessed 14 Jan 2020).

Tianocore, EDK II Module Information (INF) File Specification (2019), [Online], available at: https://www.gitbook.com/download/pdf/book/edk2-docs/edk-ii-inf-specification (Accessed 14 Jan 2020).

Unified Extensible Firmware Interface Specification Version 2.7 (2017), [Online], available at: http://www.uefi.org/sites/default/files/resources/UEFI_Spec_2_7.pdf (Accessed 14 Jan 2020).

Waveshare, ARPI600 User Manual (n.d.), [Online], available at: https://uamper.com/products/datasheet/arpi600_user_manual.pdf (Accessed 14 Jan 2020).

Wei-min, T., Peng, S. and Han, Z. (2008), "Design and implementation of UsbKey device driver based on Extensible Firmware Interface", *2008 9th International Conference on Signal Processing,* 26–29 October 2008, Beijing, China, pp. 2833–2836.

Информация об авторах

Александра А. Артамонова, студент, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия; 105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5; artamonova.a@yahoo.com

Андрей В. Куров, кандидат технических наук, доцент, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия; 105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5; avkur7@mail.ru

Information about the authors

Aleksandra A. Artamonova, student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; bld. 5, 2nd Bauman Str., Moscow, Russia, 105005; artamonova.a@yahoo.com

Andrei V. Kurov, Cand. of Sci (Computer Engineering), associate professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; bld. 5, 2nd Bauman Str., Moscow, Russia, 105005; avkur7@mail.ru

УДК 004.93
DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-39-53

Метод распознавания регистрационных знаков транспортных средств Китайской Народной Республики по изображению

Кирилл Л. Тассов
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия, ktassov@policesoft.ru

Денис В. Зиновьев
Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана Москва, Россия, zinoview.denis@yandex.ru

Аннотация. Представлен метод распознавания иероглифического символа в составе регистрационного знака транспортного средства Китайской Народной Республики на основе нейронной сети. Описаны выбор, архитектура и конфигурация используемой нейронной сети. Обосновано применение и эффективность методов цифровизации изображения иероглифических символов и регистрационного знака в целом с учетом загрязненности знака. Рассмотрены возможности сегментации изображения знака для его распознавания. Описан алгоритм и набор данных, использованных при обучении нейронной сети. Проведены исследования точности распознавания в зависимости от разрешения изображения. Представлены результаты работы метода. Предлагаемый метод применим для решения поставленной задачи.

Ключевые слова: регистрационные знаки, распознавание изображений, нейронные сети, сверточная нейронная сеть, дорожные камеры, транспортное средство

Для цитирования: Тассов К.Л., Зиновьев Д.В. Метод распознавания регистрационных знаков транспортных средств Китайской Народной Республики по изображению // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2020. № 1. С. 39–53. DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-39-53

Recognition method by image for license plates of the People's Republic of China

Kirill L. Tassov
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia, ktassov@policesoft.ru

Denis V. Zinovyev
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia, zinoview.denis@yandex.ru

Abstract. A method for recognizing a hieroglyphic symbol in the registration plate for a vehicle of the People's Republic of China based on a neural network is presented. The selection, architecture, and configuration of the neural network used are described. The use and effectiveness of digitalization methods for the image of hieroglyphic symbols and the registration mark as a whole, taking into account the contamination of the mark, is substantiated. The article considers possibilities of the sign image segmentation for its recognition. There is a description of the algorithm and data set that could be used while the neural network training. It studies of the accuracy recognition depending on image resolution. The results of the method are presented. The proposed method is applicable for solving the set task.

Keywords: license plates, image recognition, neural networks, convolutional neural network, traffic cameras, vehicle

For citation: Tassov, K.L., Zinovyev, D.V. (2020), "Recognition method by image for license plates of the People's Republic of China", *RSUH/RGGU Bulletin "Information Science. Information Security. Mathematics" Series,* no. 1, pp. 39–53, DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-39-53

Введение

Появление первого автомобиля во второй половине XVIII века стало значительным шагом в научно-техническом прогрессе. Со временем транспортные средства (ТС) стали неотъемлемой частью нашей повседневной жизни, и с ростом их популярности возникла необходимость контроля дорожной ситуации.

Вначале данная задача решалась вручную сотрудниками ДПС, однако с увеличением транспортного потока стало очевидно, что человек не может справиться со столь большими объемами информации, и, как следствие, возникла необходимость автоматизации данного процесса. Это привело к появлению камер фотовидеофиксации. Первые камеры (аппаратно-программный комплекс «Поток»), установленные на въездах и выездах из Москвы, выявляли в потоке транспортные средства, находящиеся в розыске.

В настоящее время спектр задач, решаемых камерами, значительно расширился. По назначению камеры фотовидеофиксации можно разделить на используемые для розыска, контроля, слежения за транспортными средствами с целью раскрытия преступлений либо контроля перемещений взрывчатых веществ и оружия и комплексы, осуществляющие контроль нарушений правил дорожного движения (нарушение скорости, пересечение стоп-линии, пересечение сплошной линии разметки, движение транспортного средства по полосе, не предназначенной для маршрутных транспортных средств).

Распознавание изображений номерных знаков различных стандартов

На данный момент средства фотовидеофиксации успешно распознают все типы государственных регистрационных знаков (ГРЗ) Российской Федерации и более 60 государств мира. Однако возникает проблема с распознаванием регистрационных знаков транспортных средств, имеющих в своем составе специфические символы, отличные от букв латинского алфавита и арабских цифр. Так, регистрационные знаки транспортных средств Китайской Народной Республики (КНР) имеют в своем составе иероглифический символ. В данный момент принимаются меры по отказу от использования регистрационных знаков данного типа, однако столь глобальный переход невозможно осуществить в короткие сроки, и в течение ближайших нескольких лет изменение ситуации маловероятно. Одной из сложностей, связанных с распознаванием ГРЗ данного типа, является низкое разрешение камер фотовидеофиксации, используемых на дорогах. Однако на пунктах пограничного контроля, при въезде на территорию Российской Федерации, применяются камеры более высокого разрешения, позволяющие повысить точность распознавания. Данная работа посвящена методу распознавания ГРЗ КНР, основанному на обработке изображений с камер данного типа.

Первый стандарт регистрационных знаков ТС в КНР был принят в 1986 г. (рис. 1), и в настоящий момент регистрационные знаки, соответствующие данному формату, выведены из эксплуатации. На текущий момент большинство используемых регистрационных знаков соответствуют стандарту 1992 г. (рис. 2) и имеют в своем составе иероглифический символ, обозначающий провинцию, букву латинского алфавита и пять символов (цифр или букв латинского алфавита, реже – дополнительного иероглифического символа), например, 沪A·12345; 京C·A1234; 苏A·1P234; 浙B·AB987; 粤Z·7C59港.

Рис. 1. Регистрационный знак ТС КНР стандарта 1986 г.

Рис. 2. Регистрационный знак ТС КНР стандарта 1992 г.

Последний, на данный момент, стандарт был принят в ноябре 2016 г. и в настоящее время применяется лишь для регистрационных знаков ТС, имеющих новые источники энергии (New Energy Vehicles)[1]. Пока данный стандарт применяется в пяти провинциях, и в ближайшее время планируется полный переход на него еще в десяти городах КНР. В регистрационных знаках данного типа заметно явное упрощение их структуры: используется один иероглифический символ для указания провинции, буква латинского алфавита, определяющая тип транспортного средства, и еще шесть букв латинского алфавита или арабских цифр, определяющих номер ТС. В этой работе предполагается распознавание регистрационных знаков данного стандарта как наиболее перспективного и наиболее

[1] Распознавание автомобильных номеров в деталях [Электронный ресурс] / Хабр. URL: https://habr.com/company/recognitor/blog/225913/ (дата обращения 14 января 2020).

вероятного для перехода в ближайшем будущем. В связи с этим структура регистрационных знаков данного стандарта рассматривается наиболее подробно.

На регистрационном знаке данного стандарта присутствует единственный иероглифический символ, обозначающий провинцию, и буква латинского алфавита, также относящаяся к региону. Далее следует последовательность из шести букв или цифр, причем для малых ТС буква находится строго в первой позиции, а для больших – строго в последней. Буква обозначает тип источника энергии: “D” и “E” – для электромобилей, “F” – для ТС, использующих иной источник энергии (рис. 3, рис. 4). Фон регистрационного знака – светло-зеленый, для региона на крупных ТС – желтый, цвет символов – черный.

Рис. 3. Регистрационные знаки малых ТС КНР стандарта 2016 г.

Рис. 4. Регистрационные знаки крупных ТС КНР стандарта 2016 г.

Для обозначения регионов используются следующие иероглифические символы: 京, 渝, 沪, 津, 皖, 闽, 粤, 贵, 琼, 冀, 黑, 豫, 鄂, 湘, 苏, 赣, 吉, 辽, 青, 陕, 鲁, 晋, 川, 云, 浙, 桂, 蒙, 宁, 藏, 新. Всего допускается использование 31 иероглифического символа.

Алгоритмы распознавания регистрационных знаков

В общем случае основными шагами любого алгоритма распознавания регистрационного знака являются:
1. Предварительный поиск регистрационного знака – обнаружение области, в которой содержится знак.
2. Нормализация регистрационного знака – определение точных границ знака, устранение поворота изображения.
3. Распознавание символов, входящих в состав регистрационного знака.

В настоящий момент существуют программные продукты, успешно выполняющие первую и вторую задачи, в связи с чем новое решение не рассматривается в ходе данной работы – мы исходим из предположения, что регистрационный знак ТС был выделен и нормализован с использованием стороннего аппаратного или программного средства. Таким образом, входными данными является изображение регистрационного знака, причем, с учетом специфики задачи, накладываются следующие ограничения:
1. На вход подается изображение регистрационного знака ТС.
2. На вход подается изображение в градациях серого цвета.

К разрабатываемому методу распознавания предъявляются следующие требования:
1. Устойчивость к незначительным поворотам (не более ±5 градусов).
2. Устойчивость к незначительному изменению масштаба (не более 5%).
3. Устойчивость к незначительному шуму.

Для государственного регистрационного знака ТС РФ необходимым условием успешного распознавания является ширина изображения регистрационного знака, не менее 80 и не более 200 пикселей[2]. В данной работе для регистрационного знака ТС КНР ввиду сравнительно более сложной структуры иероглифи-

---

[2] Не соблаговолите ли больше не нарушать, сэр? [Электронный ресурс] // Хабр. URL: https://habr.com/company/recognitor/blog/222539/ (дата обращения 14 января 2020).

ческого символа и в предположении использования камеры сравнительно более высокого разрешения предлагается использовать значение 250×65 пикселей, для ширины и высоты соответственно. Таким образом, подаваемое на вход изображение преобразуется к данному размеру.

Распознавание символов является классической задачей компьютерного зрения, в связи с чем разработан ряд алгоритмов, с определенной точностью решающих данную задачу. Задача распознавания регистрационного знака транспортного средства имеет некоторые специфические особенности, часть из которых упрощают задачу, а другие – усложняют. Как правило, символы на регистрационном знаке имеют фиксированный паттерн, что позволяет в случае идеально неискаженного изображения (что на практике обычно недостижимо) разделить его на символы в соответствии с пропорциями, указанными в стандарте. Загрязненность поверхности регистрационного знака, с другой стороны, затрудняет успешное распознавание и является одной из наиболее частых причин ухудшения результата.

Одним из способов повышения точности распознавания путем уменьшения количества зашумленных участков является бинаризация изображения.

В общем случае задача распознавания символов регистрационного знака сводится к трем подзадачам:

1. Бинаризация изображения.
2. Разделение изображения на символы.
3. Собственно распознавание каждого из символов.

Процесс бинаризации – это перевод цветного (или в градациях серого) изображения в двухцветное черно-белое изображение. Главным параметром такого преобразования является порог t – значение, с которым сравнивается яркость каждого пикселя. По результатам сравнения, пикселю присваивается значение 0 или 1. Существуют различные методы бинаризации, которые можно условно разделить на две группы – глобальные и локальные. В первом случае величина порога остается неизменной в течение всего процесса бинаризации. Во втором изображение разбивается на области, в каждой из которых вычисляется локальный порог.

Главная цель бинаризации – это радикальное уменьшение количества обрабатываемой информации. Удачная бинаризация позволяет упростить дальнейшую обработку изображения. С другой стороны, неудачи в процессе бинаризации могут привести к таким искажениям, как разрывы в линиях, потеря значащих деталей, нарушение целостности объектов, появление шума и непредсказуемое искажение символов из-за неоднородностей фона.

Основные алгоритмы бинаризации описаны в[3]. Как было указано ранее, бинаризация изображения может приводить как к повышению точности распознавания, так и к ее понижению, а также в значительной мере зависит от методов последующей обработки изображения. В связи с этим использование бинаризации или отказ от ее использования будет обоснован далее.

Задача выделения символов на фоне изображения (задача сегментации изображения) может быть решена наивным методом, на основе заранее определенных соотношений либо сведением к задаче выделения контуров.

Наивный метод предполагает разбиение исходного изображения на части в соответствии с известными пропорциями (рис. 5). Этот метод обладает рядом преимуществ:

1. Высокая скорость обработки изображения.
2. В общем случае не требует бинаризации.
3. Устойчивость к искажениям символа.
4. Простота реализации.
5. Устойчивость к помехам, не отфильтрованным в ходе бинаризации.

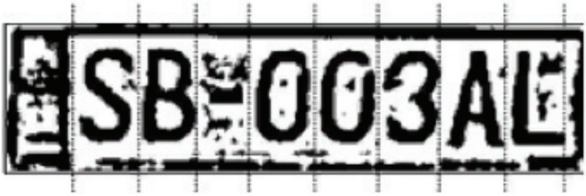

Рис. 5. Простой алгоритм сегментации регистрационного знака

Однако также можно обозначить ряд недостатков данного метода:

1. Лишние области на изображении символа.
2. Возможно отсечение частей символа при значительных поворотах или смещениях регистрационного знака на исходном изображении.

---

[3] Сегментация изображения [Электронный ресурс] // Хабр. URL: https://habr.com/post/128768/ (дата обращения 14 января 2020).

Алгоритмы выделения контуров изображений

Большинство методов выделения контуров основаны на одном из базовых свойств сигнала яркости – разрывности [Исрафилов 2017]. Один из наиболее ранних алгоритмов по обнаружению контуров изображения принадлежит Лоуренсу Робертсу [Гонсалес, Вудс 2005]. Данный алгоритм основан на дифференцировании амплитуды сигнала, что равносильно вычислению дискретных разностей амплитуд отсчетов. Также известен алгоритм Собеля [Гонсалес, Вудс 2005], основанный на вычислении градиента изображения, однако, в отличие от алгоритма Робертса, он опирается на понятие центральной разности. Также распространены статистические методы поиска контура.

Будем исходить из предположения, что выделение регистрационного знака на фоне транспортного средства произведено сторонними средствами и выполнено в достаточной мере корректно. Таким образом, исходя из условий предметной области, допустимо применение наивного метода.

Задача распознавания символов регистрационного знака ТС КНР разбивается на две подзадачи.

1. Распознавание буквенно-числовой последовательности.
2. Распознавание иероглифического символа.

В настоящий момент существует некоторое множество программных комплексов, успешно выполняющих первую задачу, однако не существует программного решения для выполнения обеих задач в одном продукте.

Основными методами, применяемыми при распознавании символов, являются метод *k* ближайших соседей, корреляционный метод и методы, основанные на применении нейронных сетей.

Нейронные сети в задаче распознавания регистрационного знака

Рассмотрим метод, основанный на применении нейронных сетей, поскольку он позволяет получить приемлемую точность при сравнительно небольших затратах вычислительных ресурсов и обладает устойчивостью к шуму и смещениям символа на изображении. Использование нейронных сетей позволяет отказаться от использования бинаризации как предварительного этапа обработки изображения.

В настоящий момент существует множество архитектур нейронных сетей, успешно применяемых для решения различных классов задач. В данной работе в качестве архитектуры нейронной сети была выбрана сверточная нейронная сеть (СНС), также называемая сетью свертки [Хайкин 2018], которая представляет собой развитие идей перцептрона и неокогнитрона. Она была предложена Яном Лекуном в 1988 г. для распознавания двумерных поверхностей с высокой степенью инвариантности к преобразованиям, масштабированию и иным видам деформаций.

Используемая сеть имеет следующую конфигурацию (рис. 6):

1. Входной слой. На вход сети подается изображение иероглифического символа в градациях серого цвета размера 50 × 100.
2. Слой свертки, содержащий 64 фильтра с ядром 5 × 5 с функцией активации ReLU, задачей которого является извлечение низкоуровневых признаков.
3. Слой подвыборки 2 × 2, выбирающий элемент путем извлечения максимального из элементов окна размера 2 × 2. Обеспечивает инвариантность к смещениям.
4. Слой свертки, содержащий 128 фильтров с ядром 3 × 3 с функцией активации ReLU, выделяющий более высокоуровневые признаки, чем первый слой свертки.
5. Слой подвыборки 2 × 2, выбирающий элемент путем извлечения максимального из элементов окна размера 2 × 2. Выполняет схожую с первым слоем подвыборки функцию.
6. Слой свертки, содержащий 256 фильтров с ядром 2 × 2 с функцией активации ReLU, выделяющей более высокоуровневые признаки, чем второй слой свертки.
7. Слой подвыборки 2 × 2, выбирающий элемент путем извлечения максимального из элементов окна размера 2 × 2. Выполняет схожую с первым слоем подвыборки функцию.
8. Слой преобразования многомерного тензора в одномерный (Flatten).
9. Три полносвязных слоя, имеющих 256, 512 и 256 нейронов соответственно, каждый с функцией активации ReLU, задачей которых является собственно распознавание.
10. Выходной слой с сигмоидальной функцией активации. На выходе необходимо получить вектор размера 31 – вероятность принадлежности изображения одному из классов.

Для обучения сверточных нейронных сетей, так же как и для обучения многослойного перцептрона Румельхарта [Хайкин 2018], используется алгоритм обратного распространения ошибки, применяемый в исходном, без изменений, виде для обучения полносвязных слоев и модифицированный, с учетом неполносвязности, – для сверточных слоев.

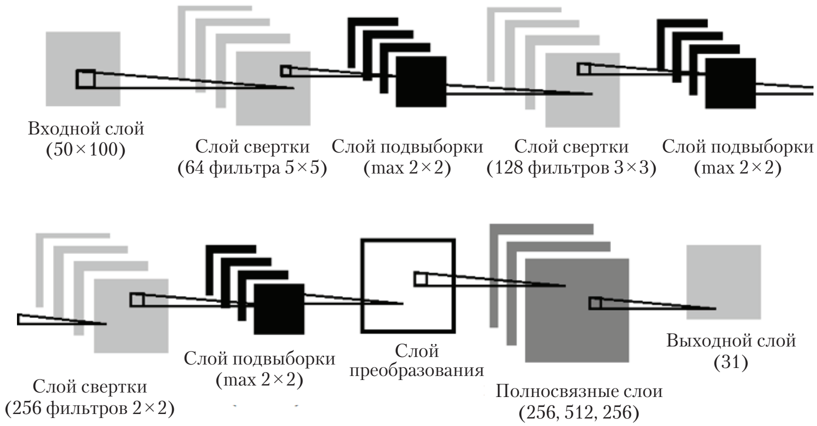

Рис. 6. Конфигурация нейронной сети

Сигнал ошибки выходного нейрона j на итерации n определяется соотношением

$$e_j(n) = d_j(n) - y_j(n), \tag{1}$$

где $d_j(n)$ означает желаемый отклик нейрона, а $y_j(n)$ – полученный отклик.

Текущее значение энергии ошибки слоя определяется как

$$E(n) = \frac{1}{2}\sum_{j\in C} e_j^2(n), \tag{2}$$

где C – множество нейронов выходного слоя. Настройка весов выполняется в соответствии с ошибками, вычисленными для каждого образа, представленного в сети.

На нейрон выходного слоя J поступает поток сигналов от нейронов, расположенных в предыдущем слое. Индуцированное локальное поле, полученное на входе функции активации, связанной с данным нейроном, может быть представлено в виде

$$v_j^{(l)}(n) = \sum_{i=0}^{m} w_j^{(l)}(n) y_i^{(l-1)}(n), \tag{3}$$

где m – общее число входов нейрона J слоя l, при этом синаптический вес w_{j0} соответствует фиксированному входу $y_0 = +1$ и равен пороговому значению b_j. Отклик нейрона j на итерации n равен

$$y_j^{(l)}(n) = \varphi_j^{(l)}\left(v_j^{(l)}(n)\right). \tag{4}$$

Алгоритм обратного распространения ошибки заключается в применении к синаптическому весу $w_{ji}^{(l)}(n)$ коррекции $\Delta w_{ji}^{(l)}(n)$:

$$\Delta w_{ji}^{(l)}(n) = -\eta \frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}^{(l)}(n)} \tag{5}$$

$$\frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}^{(l)}(n)} = -e_j^{(l)}(n)\varphi_j^{(l)'}\left(v_j^{(l)}(n)\right)y_j^{(l-1)}(n), \tag{6}$$

где η – скорость обучения алгоритма. Наличие в выражении знака «минус» является следствием использования метода градиентного спуска.

Окончательно выражение для определения коррекции имеет вид

$$\Delta w_{ji}^{(l)}(n) = \eta\delta_j^{(l)}(n)y_j^{(l-1)}(n), \tag{7}$$

где $\delta_j^{(l)}(n)$ – локальный градиент, определяемый выражением

$$\delta_j^{(l)}(n) = e_j^{(l)}(n)\varphi_j^{(l)'}\left(v_j^{(l)}(n)\right). \tag{8}$$

В случае нейрона скрытого слоя градиент ошибки определяется рекурсивно на основе сигналов ошибки всех нейронов, с которым он непосредственно связан:

$$\delta_j^{(l-1)}(n) = e_j^{(l)}(n)\varphi_j^{(l-1)'}\left(v_j^{(l)}(n)\right)\sum_k \delta_k^{(l)}(n)\, w_{kj}^{(l-l)}(n). \tag{9}$$

В данной работе было проведено исследование, направленное на определение зависимости точности распознавания регистрационных знаков транспортных средств Китайской Народной Республики от разрешения средств фотовидеофиксации.

Для обучения нейронной сети использовалась выборка размером 400 изображений иероглифических символов, полученных путем извлечения его из изображения, полученного с использованием камеры наружного наблюдения контрольно-пропускного пункта, предоставляющей для последующей обработки разрешение изображений 704 пикселей по горизонтали и 576 пикселей – по вертикали, из которых на каждый символ приходилось порядка 160 пикселей по горизонтали и 270 пикселей по вертикали.

С учетом малых размеров обучающей выборки тестирование проводилось на одной выборке, изображения которой подвергались сжатию с потерями.

Как было определено ранее, на вход нейронной сети подается тензор, имеющий форму [50, 100, 1], где 50 – ширина изображения, 100 – высота изображения, 1 – количество 8-битных каналов цвета изображения. Таким образом, каждое подаваемое на вход нейронной сети изображение, как из обучающей выборки, так и из тестовой выборки, вначале приводилось к данному размеру.

Полученные в ходе исследования результаты приведены в табл. 1 и представлены в виде графика на рис. 7. Так как изображения с разрешением выше 50×100 подвергаются сжатию, изменение расширения в данном диапазоне не производится.

Таблица 1

Зависимость точности распознавания
от разрешения изображения

Разрешение изображения, пикс	Точность распознавания, %
160×270	91.56
48×81	89.16
32×54	69.88
27×46	53.01
24×40	32.53
16×27	14.46
8×14	4.82

Как видно на графике, понижение расширения ведет к снижению точности распознавания, при этом зависимость точности от разрешения близка к линейной.

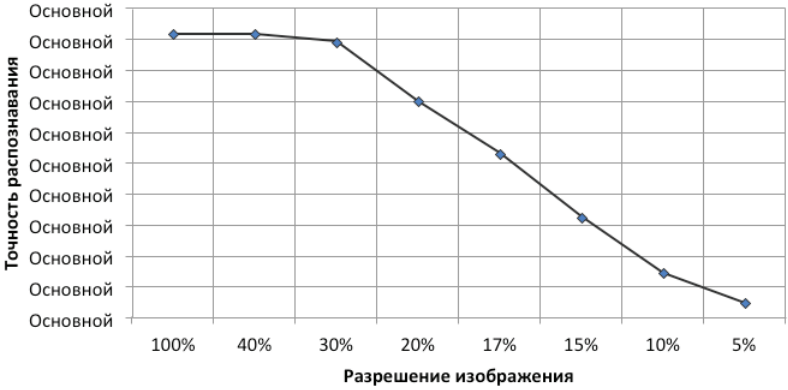

Рис. 7. График зависимости точности распознавания от разрешения изображения

Заключение

Разработанный метод при высоком разрешении средств фотофиксации показал достаточно высокий процент корректно распознанных изображений, что позволяет говорить о возможности внедрения метода в эксплуатацию.

Однако результат также показывает наличие значительного влияния разрешения изображения на результаты распознавания. В качестве дальнейшего направления развития возможно исследовать применимость других архитектур глубоких нейронных сетей для решения задачи. Кроме того, методика имеет потенциал к увеличению скорости обучения и распознавания путем оптимизации алгоритма для использования в распределенных системах.

Литература

Гонсалес, Вудс 2005– *Гонсалес Р., Вудс Р.* Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2005.

Исрафилов 2017 – *Исрафилов Х.С.* Исследование методов бинаризации изображений [Электронный ресурс]. URL: http://scientificjournal.ru/images/PDF/2017/VNO-30/issledovanie-metodov-binarizatsii.pdf (дата обращения 14 января 2020).

Хайкин 2018 – *Хайкин С.* Нейронные сети. Полный курс. М.: Вильямс, 2018.

References

Gonsales, R. and Woods, R. (2005), *Tsifrovaya obrabotka izobrazheniy* [Digital Image Processing], Technosfera, Moscow, Russia.

Israfilov, Kh.S. (2017), Issledovanie metodov binarizacii izobrajeniy [Images Binarization Methods Research], available at: http://scientificjournal.ru/images/PDF/2017/VNO-30/issledovanie-metodov-binarizatsii.pdf (Acceded 14 Jan. 2020)

Khaikin, S. (2018), Neironnye seti. Polny kurs [Neural Networks. A Comprehensive Foundation], Vil'yams, Moscow, Russia.

Информация об авторах

Кирилл Л. Тассов, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия; 105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5; ktassov@policesoft.ru

Денис В. Зиновьев, студент, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия; 105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5; zinoview.denis@yandex.ru

Information about the authors

Kirill L. Tassov, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; bld. 5, 2nd Bauman Str., Moscow, Russia, 105005; ktassov@policesoft.ru

Denis V. Zinoviev, student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; bld. 5, 2nd Bauman Str., Moscow, Russia, 105005; zinoview.denis@yandex.ru

УДК 519.2
DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-54-74

Памяти академика Сагди Хасановича Сираждинова – 100 лет со дня рождения

Шакир К. Фарманов
Институт математики им. В.И. Романовского АН Республики Узбекистан, Ташкент, Республика Узбекистан, shakirformanov@yandex.com

Валентин К. Жаров
Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия, valcon@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена памяти нашего выдающегося современника, ученого, исследователя, воспитателя молодых ученых. Благодарность авторов статьи – небольшая толика в безмерном пространстве благодарности своим учителям. Сагди Хасанович Сираждинов был мостом традиций российской математической школы, блестящим ее учеником, связывающим следующие поколения ученых. Его работой и работой В.И. Романовского была создана ташкентская (шире – узбекистанская) школа теории вероятностей и математической статистики, имевшая блестящие результаты в советской математической школе. Его исследования относились к широким областям знания: от применения предельных теорем в анализе, комбинаторике и теории чисел и математической статистики (в первую очередь, близким к статистическому контролю) до вопросов истории математики в Средней Азии и изучения трудов мыслителей Востока.

Ключевые слова: математическая статистика и теория вероятностей, предельные теоремы, ташкентская школа теории вероятностей, цепи Маркова, история математики, суммы случайных векторов, Первый Всемирный конгресс общества математической статистики и теории вероятностей им. Бернулли

Для цитирования: Фарманов Ш.К., Жаров В.К. Памяти академика Сагди Хасановича Сираждинова – 100 лет со дня рождения // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2020. № 1. С. 54–74. DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-54-74

In memory of the academician Sagdi Khasanovich Sirazhdinov – centenary of birth

Shakir K. Farmanov
Romanovsky Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan, shakirformanov@yandex.com

Valentin K. Zharov
Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia, valcon@mail.ru

Abstract. The article is dedicated to the memory of our outstanding contemporary, scientist, researcher, educator of young scientists. Gratitude of the authors of the article is a small fraction in the immense space of Gratitude to their teachers. Sagdi Khasanovich Sirazhdinov was the bridge of traditions of the Russian mathematical school, a brilliant student of which he was and which he conveyed to the next generations of scientists. The Tashkent (wider, Uzbek) school of probability theory and mathematical statistics was created by his work and that of V.I. Romanovsky. It had brilliant results in the Soviet mathematical school. His research covered a wide field of knowledge: from the application of the limit theorems in the analysis, combinatorics, number theory and mathematical statistics (primarily, close to statistical control) to issues of the history of mathematics in Central Asia and the study of the works of Eastern thinkers.

Keywords: mathematical statistics and probability theory, limit theorems, Tashkent school of probability theory, Markov chains, the history of mathematics, sums of random vectors, The First World Congress of the Bernoulli Society of Mathematical Statistics and Probability Theory

For citation: Farmanov, Sh.K., Zharov, V.K. (2020), “In memory of the academician Sagdi Khasanovich Sirazhdinov – centenary of birth”, *RSUH/RGGU Bulletin. “Information Science. Information Security. Mathematics” Series*, no. 1, pp. 54–74, DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-54-74

Академик Академии наук Узбекистана Сагди Хасанович Сираждинов родился 10 мая 1920 г. в городе Коканде Ферганской области Узбекистана (в то время с 1919 г. – Туркестанская АССР, а с 27 октября 1924 г. – Узбекская ССР). В начале 30-х годов XX в. семья Сираждиновых переехала в город Ташкент (ставший столицей Узбекистана в 1930 г.). В 1937 г. молодой Сагди Сираждинов окончил школу № 1 города Ташкента (в настоящее время эта школа носит его имя) и в этом же году поступил на физико-математический факультет Среднеазиатского государственного университета (САГУ[1] – ныне Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека). После окончания университета в 1942 г. он поступил на курсы подготовки военных инженеров-синоптиков для оперативного прогнозирования погодных явлений. В 1943–1945 гг. С.Х. Сираждинов проходил военную службу в Красной Армии в приграничных к фронту областях (г. Баку, Астраханская область, Прибалтика) и участвовал в обеспечении действующей армии точными информационными данными об изменении погоды.

После демобилизации из армии С.Х. Сираждинов в 1945 г. поступил в аспирантуру САГУ. Его научным руководителем был знаменитый математик, основатель современной узбекской математической школы Всеволод Иванович Романовский (1879–1954). Он был воспитанником Санкт-Петербургского университета, учеником великого русского математика А.А. Маркова. В.И. Романовский до 1918 г. работал профессором русского Варшавского университета и в годы Гражданской войны в России возвратился в родной Ташкент и стал преподавать физику и математику в местной гимназии.

В.И. Романовский принимал самое деятельное участие в организации первого вуза в Средней Азии – САГУ, и научно-исследовательского Института математики Академии наук Узбекистана (1943 г.); в настоящее время этот институт носит его имя.

В 1938 г. в Москве В.И. Романовский впервые опубликовал объемную монографию «Математическая статистика» на русском языке. При этом следует учесть тот факт, что в тридцатые годы статистика была объявлена вредной, лженаукой. Но уже в 1940 г. состоялось Всесоюзное совещание по математической статистике в Москве, а следующее проходило в Ташкенте (27.09.1948–02.10.1948). Всеволод Иванович находился в постоянной научной переписке с создателями математической статистики К. Пирсоном (Великобритания), Р. Фишером (Великобритания), фон Мизесом (Германия).

В 1947 г. С.Х. Сираждинов защитил кандидатскую диссертацию на тему «О некоторых вопросах теории многомерных полиномов Эрмита» и стал работать научным сотрудником Института математики АН Узбекистана и преподавать в родном университете.

[1] Первый САГУ образован из ТуркГУ (1920 г. постановлением СНК РСФСР), который был создан в свою очередь из Туркестанского народного университета, образованного в 1918 г. С 1954 г. САГУ получил имя В.И. Ленина, в 1960 г. был переименован в ТашГУ им. В.И. Ленина, а с 2000 г. стал Национальным университетом Узбекистана им. Мирзо Улугбека.

В 1948 г. в Ташкенте была организована Всесоюзная конференция по теории вероятностей и математической статистике. В подготовке и проведении этой конференции принимали участие Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоров, В.И. Романовский, Т.А. Сарымсаков, Н.В. Смирнов и другие известные математики. Во время работы этой конференции В.И. Романовский познакомил С.Х. Сираждинова с А.Н. Колмогоровым. После обстоятельной беседы с А.Н. Колмогоровым молодому С.Х. Сираждинову было предложено поступить в докторантуру Математического института им. В.А. Стеклова, где А.Н. Колмогоров заведовал отделом «Теория вероятностей». Таким образом, С.Х. Сираждинов в 1949 г. стал прикомандированным докторантом МИАН, и его научным консультантом был академик А.Н. Колмогоров, признанный одним из величайших математиков XX века.

По словам Сагди Хасановича, в годы его пребывания в докторантуре в «Стекловке» (так всегда называли Математический институт им. В.А. Стеклова) образовалась «великолепная пятерка» друзей – учеников А.Н. Колмогорова (С.Х. Сираждинов, Б.А. Севастьянов, Л.Н. Большев, А.А. Петров, Ю.В. Прохоров). Из них С.Х. Сираждинов (1920–1988) и Ю.В. Прохоров (1929–2013) стали академиками[2]; А.А. Петров умер (1959), Б.А. Севастьянов (1923–2016), Л.Н. Большев (1925–1978) (участник Великой Отечественной войны, летчик-истребитель, кавалер ордена Красного Знамени) стали членами-корреспондентами АН СССР.

В 1953 г. на ученом совете МИАН С.Х. Сираждинов защитил докторскую диссертацию «Предельные теоремы для однородных цепей Маркова». Официальными оппонентами выступали академики С.Н. Бернштейн, Ю.В. Линник и член-корреспондент АН СССР Н.В. Смирнов. После защиты докторской диссертации в течение 1953–1957 гг. С.Х. Сираждинов по рекомендации А.Н. Колмогорова работал профессором Московского государственного университета. Среди студентов С.Х. Сираждинова были будущие академики А.Н. Ширяев, С.А. Айвазян и признанные крупные специалисты по теории вероятностей профессора Ю.А. Розанов, В.В. Сазонов, Д.М. Чибисов, Л.Д. Мешалкин и другие.

Сагди Хасанович всю свою жизнь поддерживал дружеские отношения с коллегами и сокурсниками.

Круг научных интересов Сагди Хасановича был велик: от применения предельных теорем в анализе, комбинаторике и теории чисел и математической статистике (в первую очередь, близким

---

[2] С.Х. Сираждинов был академиком АН Узбекистана с 1966 г.

Сираждинов Сагди Хасанович,
академик Гнеденко Борис Владимирович,
академик Прохоров Юрий Васильевич

к статистическому контролю) до вопросов истории математики в Центральной Азии и изучения трудов мыслителей Востока. Он вместе со своим учителем В.И. Романовским считается основоположником ташкентской школы теории вероятностей и математической статистики, многие результаты учителя были изложены в монографиях, коллективных монографиях; например, совместно с Ш.К. Формановым написана книга «Предельные теоремы для сумм случайных векторов, связанных в цепь Маркова». Его учениками были С.В. Нагаев, Г.П. Матвиевская, Т.А. Азларов, А.В. Нагаев, Т.Л. Малевич, Ш.К. Фарманов и многие другие математики среднеазиатских республик СССР.

В Ташкенте им и его другом академиком Ю.В. Прохоровым (1929–2013) был подготовлен и с 8 по 14 сентября 1986 г. блестяще проведен Первый Всемирный конгресс общества математической статистики и теории вероятностей им. Бернулли. В нем участвовало более 500 иностранных специалистов, а С.Х. Сираждинов выступил с докладом «Вероятностные методы в комбинаторном анализе». Теперь проведение этого конгресса стало традиционным.

С.Х. Сираждинов был ректором ТашГУ им. В.И. Ленина (ныне Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека) два периода: в 1966–1970 гг. и в 1983–1987 гг.[3], но начинал он свою активную преподавательскую деятельность в Москве, с 1954 по 1956 г. был старшим научным сотрудником механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. В 1957–1967 гг. С.Х. Сираждинов возглавлял Институт математики им. В.И. Романовского АН УзССР.

Педагогическое наследие

Обратившись к списку публикаций С.Х. Сираждинова, можно заметить, что некоторые исследования проведены и статьи написаны совместно с начинающими, «юными» исследователями – учениками мэтра. Многие, кто впервые брался за перо, чтобы изложить свои результаты, сталкивались с проблемой: с чего начать изложение, как организовать план, как и на какую литературу нужно ссылаться и, в конце концов, каким должен быть стиль, чтобы тебя понимали коллеги. Этому всегда учит хороший руководитель, Учитель.

Другой пример. Один из его учеников вспоминал студенческую молодость. Приехали они учиться в Москву, их направили как весьма перспективных студентов-математиков на механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова. Была уже поздняя осень. И, понятно, молодые ребята ничего не взяли с собой для встречи русской зимы, да и осени не ташкентской. А тут как раз приехал Сагди Хасанович в Москву и решил прийти в «гости» к ребятам, а они живут втроем в одном боксе. Первый вопрос, тогда в 1960-х гг. ректора ТашГУ, был «Как устроились?», а второй «А покажите мне, какая у вас зимняя одежда». Ну, в общем, он обнару-

[3] Один из авторов этой статьи в этот период по рекомендации выдающегося историка математики Г.П. Матвиевской и поддержке С.Х. Сираждинова стал прикрепленным аспирантом Института истории естествознания и техники им. С.И. Вави́лова АН СССР, руководителем научной работы был глава советских историков математики А.П. Юшкевич, а консультантом – Э.И. Березкина.

жил, что ребята есть ребята. И поехал ректор со своими учениками по магазинам покупать на свои деньги одежду и одевать будущих математиков. Надо заметить, что ребята не подвели своего учителя – стали академиками и профессорами.

Впервые публикуется сводный список работ С.Х. Сираждинова начиная с его кандидатской диссертации.

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ С.Х. СИРАЖДИНОВА

1947

1. *Сираждинов С.Х.* О некоторых вопросах теории многомерных полиномов Эрмита: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ташкент, 1947. 56 с.

1948

2. *Сираждинов С.Х.* О некоториых соотношениях для многомерных полиномов Эрмита // Доклады АН УзССР. 1948. № 5. С. 3–7.
3. *Сираждинов С.Х.* О неравенствах между верхними гранями последовательности многомерных функций Эрмита // Доклады АН УзССР. 1948. № 1. С. 3–4.

1949

4. *Сираждинов С.Х.* К теории многомерных полиномов Эрмита // Труды Института математики и механики АН УзССР. 1949. Вып. 5. С. 70–95.
5. *Сираждинов С.Х.* О комплексных цепях Маркова // Тезисы научных докладов на сессии АН УзССР. Ташкент, 1949. С. 11.
6. *Сираждинов С.Х., Сарымсаков Т.А., Романов Н.П., Асадова М.А., Гугнина В.И.* Классификация канонических преобразований // Тезисы научных докладов на сессии АН УзССР. Ташкент, 1949. С. 14–15.
7. *Сираждинов С.Х.* О моментах многомерной нормальной корреляции // Бюллетень Среднеазиатского университета. 1949. № 30. С. 79–83.
8. *Сираждинов С.Х.* Об одном свойстве одного класса последовательности функций точек // Труды Института математики и механики АН УзССР. 1949. Вып. 7. С. 176–181.
9. *Сираждинов С.Х., Морозова М.И.* Результаты статистического анализа чередования типов погоды над Средней Азией // Доклады АН УзССР. 1949. № 12. С. 12–14.
10. *Сираждинов С.Х., Морозова М.И.* Статистический анализ чередования типов погоды над Средней Азией // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1949. № 5. С. 65–76.

1950

11. *Сираждинов С.Х.* Об усиленном законе больших чисел для неоднородных цепей Маркова // Доклады АН УзССР. 1950. № 7. С. 3–5.
12. *Сираждинов С.Х.* Эргодический принцип для неоднородных цепей Маркова // Доклады АН УзСССР. 1950. № 5. С. 829–830.

1951

13. *Сираждинов С.Х.* О методе двойного уровня // Доклады АН УзССР. 1951. № 5. С. 9–10.

1952

14. *Сираждинов С.Х.* Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова // Доклады АН УзССР. 1952. № 6. С. 1143–1146.
15. *Сираждинов С.Х.* Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова // Успехи математических наук. 1952. Т. 7. Вып. 4. С. 141.

1953

16. *Сираждинов С.Х.* Предельные теоремы для однородных процессов Маркова с непрерывным временем: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Ташкент, 1953. 8 с.

1954

17. *Сираждинов С.Х.* Предельные теоремы для однородных цепей Маркова с непрерывным временем // Доклады АН СССР. 1954. Т. 98. № 6. С. 905–908.

1955

18. *Сираждинов С.Х., Севастьянов Б.А.* Математическая статистика и контроль промышленной продукции // Природа. 1955. № 8. С. 28–34.
19. *Сираждинов С.Х.* Одинарный статистический приемочный контроль // Труды Института математики и механики АН УзССР. 1955. Вып. 15. С. 41–56.
20. *Сираждинов С.Х.* Предельные теоремы для однородных цепей Маркова. Ташкент: Изд-во АН УЗССР, 1955.

1956

21. *Сираждинов С.Х.* Методы статистического контроля оценки качества продукции // Стандартизация. 1956. № 1. С. 8–14.
22. *Сираждинов С.Х.* Несмещенные оценки при распределении по закону Пуассона и некоторые применения // Доклады АН УзССР. 1956. № 6. С. 3–5.

23. *Сираждинов С.Х.* Об оценках с наименьшим смещением при биномиальном распределении // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1. Вып. 1. С. 168–174.

1957

24. *Сираждинов С.Х.* Несмещенные оценки доли пропущенного брака при методе однократной выборки // Труды Института математики и механики АН УзССР. 1957. Вып. 20. С. 89–100.
25. *Сираждинов С.Х.* Предельные теоремы для цепей Маркова с непрерывным временем // Юбилейная научная сессия, посвященная 40-летию Великой Октябрьской Социалистической революции: Тезисы докладов и сообщений. Ташкент, 1957. С. 8.
26. *Сираждинов С.Х., Эйдильнант М.И.* О некоторых вопросах приемочного статистического контроля // Юбилейная научная сессия, посвященная 40-летию Великой Октябрьской Социалистической революции: Тезисы докладов и сообщений. Ташкент, 1957. С. 9.

1958

27. *Сираждинов С.Х.* Локальная предельная теорема для цепи Маркова с непрерывным временем // Известия. АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1958. № 6. С. 83–86.
28. *Сираждинов С.Х.* Международный конгресс математиков в Эдинбурге 14–21 авг. 1958 г. // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1958. № 6. С. 88–90.
29. *Сираждинов С.Х., Каган А.М.* Об условии Г. Крамера // Доклады АН УзССР. 1958. № 12. С. 5–7.

1959

30. *Сираждинов С.Х.* О локальной теореме // Доклады АН УзССР. 1959. № 2. С. 5–6.
31. *Сираждинов С.Х.* О локальной теореме для цепей Маркова с непрерывным временем // Успехи математических наук. 1959. Т. 14. Вып. 4. С. 235–236.
32. *Сираждинов С.Х.* О точной оценке для локальной теоремы // Теория вероятностей и ее применения. 1959. Т. 4. Вып. 2. С. 229–223.
33. *Сираждинов С.Х.* Об аддитивной задаче с растущим числом слагаемых // Доклады АН УзССР. 1959. № 1. С. 5–7.

1960

34–40. *Сираждинов С.Х., Эйдельнант М.И.* Стандарты статистического контроля: (Проект РТМ). Ч. 1. Вып. 1–5. Ташкент. 1960–1961.
Вып. 1. 1960. 63 с.; Вып. 2А. 1960. 63 с.; Вып. 2Б. 1961. 117 с.; Вып. 3А. 1960. 60 с.; Вып. 3Б. 1960. 44 с.; Вып. 4. 1961. 21 с.; Вып. 5. 1961. 18 с.

1961

41. *Сираждинов С.Х., Эйдельнант М.И.* К вопросу об оценках качества продукции по результатам выборочного контроля // Труды Института математики и механики АН УзССР. 1961. Вып. 22. С. 135–145.
42. *Сираждинов С.Х.* К вопросу рационального выбора плана статистического приемочного контроля // Труды Ташкентского университета. 1961. Вып. 189. С. 79–88.

1962

43. *Сираждинов С.Х., Маматов М.* О локальной теореме для плотностей // Доклады АН СССР. 1962. Т. 142. № 5. С. 1036–1037.
44. *Сираждинов С.Х., Маматов М.* О сходимости в среднем для плотностей // Теория вероятностей и ее применения. 1962. Т. 7. Вып. 4. С. 433–437.
45. *Сираждинов С.Х.* Об общей локальной предельной теореме для сумм случайных величин // Труды Второй Республиканской конференции по математике и механике. Алма-Ата, 1962. С. 73.
46. *Sirazhdinov S.Kh.* On strong convergence of the distributions of sums of independent terms // Abstracts of short communications. International Congress Mathematics. Stockholm, 1962. P. 316–317.

1963

48. *Сираждинов С.Х., Азларов Т.А.* Об одной равномерной локальной теореме // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1963. № 2. С. 32–37.
49. *Сираждинов С.Х., Азларов Т.А.* Об одной теореме А.Г. Постникова // Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент, 1963. С. 86–90.
50. *Сираждинов С.Х., Маматов М.* О глобальных предельных теоремах для плотностей и функций распределений // Предельные теоремы теории вероятностей. Ташкент, 1963. С. 91–107.

1964

51. *Сираждинов С.Х., Сарымсаков Т.А., Аржаных И.С., Романов Н.П.* Обзор развития математики в Узбекистане за 40 лет // Объединенная научная сессия, посвященная 40-летию УзССР и Коммунистической партии Узбекистана: Тезисы докладов. Ташкент, 1964. С. 19–20.
52. *Сираждинов С.Х.* Об одной схеме случайного блуждания в эвклидовом пространстве // Объединенная научная сессия, посвященная 40-летию УзССР и Коммунистической партии Узбекистана: тезисы докладов. Ташкент, 1964. С. 24.
53. *Сираждинов С.Х., Абдурахманов Т.* Статистический приемочный контроль по многим признакам для N // Теория вероятностей и математическая статистика. Ташкент, 1964. Вып. 1. С. 13–25.

1965

54. *Сираждинов С.Х., Шахайдарова Н.* О равномерной локальной теореме для плотностей // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1965. № 6. С. 30–36.

1966

55. *Сираждинов С.Х., Оразов Г.* О приближении к нормальному закону // Доклады АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1966. № 1. С. 3–6.
56. *Сираждинов С.Х.* О случайном блуждании по схеме Маркова в многомерном пространстве // Тезисы кратких научных сообщений Международного конгресса математиков. Секция 2. М., 1966. С. 51–52.
57. *Сираждинов С.Х., Оразов Г.* Обобщение одной теоремы Г. Раббинса // Предельные теоремы и статистические выводы. Ташкент, 1966. С. 154–162.
58. *Сираждинов С.Х., Оразов Г.* Уточнение одной теоремы Г. Раббинса // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1966. № 1. С. 30–39.

1967

59. *Сираждинов С.Х., Азларов Т.А., Султанова Д.Х.* Исследование по теории надежности и ее применениям // Материалы научной конференции профессорско-преподавательского состава ТашГУ. Математика и механика. Ташкент, 1967. С. 1–3.
60. *Сираждинов С.Х.* Итоги исследований в области теории вероятностей и математической статистики в Узбекистане за 50 лет. Краткий обзор работ В.И. Романовского // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1967. № 5. С. 21–26.
61. *Сираждинов С.Х., Фарманов Ш.К.* О предельной теореме для цепей Маркова // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1967. № 2. С. 31–37.
62. *Сираждинов С.Х., Оразов Г.* Об оценке остаточного члена в локальной предельной теореме для случайного числа случайных слагаемых // Доклады АН УзССР. 1967. № 10. С. 3–6.
63. *Сираждинов С.Х.* Письмо в редакцию по поводу замечаний С.В. Нагаева о работе С.Х. Сираждинова и Ш.К. Фарманова «О предельной теореме для цепей Маркова» // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1967. № 6. С. 76–77.

1968

64. *Сираждинов С.Х., Талипов А.* Об одной схеме случайного блуждания // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1968. № 4.

65. *Сираждинов С.Х., Оразов Г.* Об одной теореме Б. Розена // Вероятностные модели и статистический контроль. Ташкент: Фан, 1968.

1969

66. *Сираждинов С.Х., Фарманов Ш.К.* О предельных теоремах для цепей Маркова // Труды Советско-Японского симпозиума по теории вероятностей (Хабаровск, август 1969). Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1969.
67. *Сираждинов С.Х., Талипов А.* Об одной задаче блуждания // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1969. № 2.

1970

68. *Сираждинов С.Х., Маматов М.* Асимптотическое разложение сумм случайного числа случайных величин // Тезисы докладов 7-й научной конференции математиков Узбекистана.
69. *Сираждинов С.Х., Талипов А.* О размере линейных полимерных цепочек // Узбекский химический журнал.
70. *Сираждинов С.Х., Фазылов Х.* Некоторые вопросы СПК // Узбекский химический журнал. С. 43–46.
71. *Сираждинов С.Х., Максудов Ш., Салахитдинов М.С.* Теория функций комплексного переменного (на узбекском языке). Ташкент: Учитель, 1970.
72. *Сираждинов С.Х., Азларов Т.А., Султанова Д.* Асимптотическое изучение некоторых систем обслуживания // Большие системы. Массовое обслуживание. Надежность. М.: Наука, 1970.
73. *Сираждинов С.Х., Маматов М., Фарманов Ш.* Равномерные оценки в предельных теоремах для сумм случайного числа независимых случайных величин // Известия АН УзССР. 1970. № 6.
74. *Сираждинов С.Х., Азларов Т.А., Базаров В.* Изучение одной системы группового обслуживания // Доклады АН УзССР. 1970. Вып. 10.
75. *Сираждинов С.Х., Фазылов Х.* Об оптимальных планах статистического контроля по количественному признаку // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1970. № 4.
76. *Сираждинов С.Х.* Исследования по теории вероятностей и математической статистике в ТашГУ за 50 лет (обзор) // Труды ТашГУ. 1970. Вып. 373.
77. *Sirazhdiniv S.Kh.* Essor de l'ensoignement universitaire dansl es republiques dasive centpale et du Kasakstan. Ташкент, 1970.
78. *Сираждинов С.Х.* Крупный центр вузовской науки (к 50-летию Ташкентского университета) // Вестник высшей школы. 1970. № 9.

1971

79. *Сираждинов С.Х., Азларов Т.А., Базаров В.* Изучение одной системы группового обслуживания // Studia Sci. Math. Hungarica. 1971. Vol. 6.

80. *Сираждинов С.Х., Азларов Т.А., Джамирзаев А.А.* Некоторые замечания о теоремах переноса // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1971. № 2 (совм. с Т.А. Азларовым и А.А. Джамирзаевым).
81. *Сираждинов С.Х., Фазылов Х.* Об оптимальных планах статистического контроля по количественному признаку с неизвестной дисперсией // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1971. № 1.

1972

82. *Сираждинов С.Х., Азларов Т.А.* Предельные теоремы некоторых характеристик системы M/G/1/n // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1972. № 6.
83. *Sirazhdinov S.Kh.* About the selection of the optimal sampling plan for statistical control by quantity variables // Second Japan–USSR symposium on probability theory. Vol. 1. Kyoto, 1972.
84. *Сираждинов С.Х.* Об истории математики Средней Азии IX–XV вв. // Физико-математически списание. 1972. Объем 15. № 3 (48) (на болгарском языке).
85. *Сираждинов С.Х., Азларов Т.А.* Некоторые теоремы для некоторых характеристик системы M/G/1/n // Доклады АН УзССР. 1972. № 4.
86. *Сираждинов С.Х., Фазылов Х.* Об оптимальных планах статистического приемочного контроля по качественному признаку // Научные труды Ташкентского государственного университета. 1972. Вып. 402.
87. *Сираждинов С.Х., Фазылов Х.* Об оптимальных планах статистического приемочного контроля для двухстороннего критерия по количественному признаку // Научные труды Ташкентского государственного университета. 1972. Вып. 402.

1973

88. *Сираждинов С.Х., Гафуров М.У.* Замечание к одной предельной теореме // Случайные процессы и статистические выводы. Вып. 3. Ташкент: Фан, 1973.
89. *Сираждинов С.Х.* Оптимальные планы контроля в случае многих категорий // Международная конференция по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс, 1973.
90. *Сираждинов С.Х., Раджабов А.* Об оптимальных планах статистического последовательного контроля по количественному признаку // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1973. № 4.
91. *Сираждинов С.Х., Ахмедов А., Матвиевская Г.П.* Математика и астрономия у Бируни. Ташкент: Фан, 1973.

92. *Сираждинов С.Х., Ахмедов А.* Некоторые вопросы математики и астрономии в «Каноне Мас'уда» Бируни // Общественные науки в Узбекистане. 1973. № 7–8.
93. *Сираждинов С.Х., Ахмедов А., Матвиевская Г.П.* Бируни – математик и астроном. Ташкент: Фан, 1973 (на узбекском языке).

1974

94. *Сираждинов С.Х., Смаханов К.* Об оптимальных планах контроля при известном начальном распределении // Случайные процессы и статистические выводы. Ташкент, 1974. Вып. 4. С. 152–162.
95. *Сираждинов С.Х., Фарманов Ш.К.* Некоторые неравенства для суммы независимых одинаково распределенных случайных векторов // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1974. № 1.
96. *Сираждинов С.Х., Азларов Т.А.* Теория вероятностей и математическая статистика (обзор работ) // Наука в Узбекистане. Т. 1. Ташкент: Фан, 1974.
97. *Сираждинов С.Х.* К проблеме планирования науки // Совершенствование управления научно-техническим прогрессом в Узбекистане. Ташкент, 1974.

1975

98. *Сираждинов С.Х., Гафуров М.У.* О предельной теореме для распределения сумм случайного числа случайных слагаемых // Тезисы III Советско-японского симпозиума по теории вероятностей. Ч. 1. Ташкент: Фан, 1975.
99. *Сираждинов С.Х., Гафуров М.У., Салиев Ш.Т.* О предельном поведении распределения сумм случайного числа случайных величин // Случайные процессы и статистические выводы. Вып. 5. Ташкент: Фан, 1975.
100. *Сираждинов С.Х., Матвиевская Г.П.* Математическое наследие великого мыслителя // Шарк юлдузи. 1975. № 12 (на узбекском языке).
101. *Сираждинов С.Х., Сираждинов Т.А., Зупаров Т.М.* Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых. Ташкент: Фан, 1975.
102. *Сираждинов С.Х.* Минимальные планы контроля в случае многих категорий Ташкент: Фан, 1975.

1976

103. *Sirazhdinov S.Kh., Landsman Z.M.* Asymptotic behavior of the information contained in statistics of the additive form // Proceedings of the Third Japan-USSR Symposium on Probability Theory. Lecture Notes in Mathematics, vol. 550. Berlin; Heidelberg: Springer, 1976.
104. *Сираждинов С.Х., Матвиевская Г.П.* Об изучении истории математики в Средней Азии // Историко-математические исследования. Вып. 21. М.: Наука, 1976.

105. *Сираждинов С.Х., Мирзахмедов М.А., Хосни А.К.* Оценка плотности вероятности и функции надежности методом весовых функций // Доклады АН УзССР. 1976. № 12.

1977

106. *Сираждинов С.Х., Вахабов В.* Об асимптотически минимаксном объеме выборки при приемочном контроле // Вторая Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике: Тезисы докладов. Вильнюс, 1977. Т. 2. С. 159.
107. *Сираждинов С.Х., Гафуров М.У.* О некоторых классах линейных преобразований, сохраняющих тип сходимости // Вторая Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике: Тезисы докладов. Вильнюс, 1977. Т. 2. С. 160–161.
108. *Сираждинов С.Х.* Предисловие // Математика и астрономия в трудах ученых средневекового Востока. Ташкент, 1977. С. 3.
109. *Sirazhdinov S.Kh., Matvievskaya G.P., Akhmedov A.* Mathematical heritage of IX–XV centuries Middle Asia scientists and study // 15th International Congress of the history of science. Edinburg, 1977. Papers by Soviet Scientists Section II. Moscow, 1977. P. 12–19.
110. *Сираждинов С.Х., Фарманов Ш.К., Эль-Фаххам М.М.* Об оценках остаточного члена в локальной предельной теореме для плотностей сумм независимых случайных величин // Доклады АН СССР. 1977. Т. 232. Вып. 4.
111. *Сираждинов С.Х., Раджабов А.* Об экономически более выгодном статистическом последовательном плане контроля по количественному признаку // Предельные теоремы и случайные процессы. Ташкент: Фан, 1977.
112. *Сираждинов С.Х., Мирзахмедов М.А., Хосни А.К.* Об оценке плотности вероятности по зависимым выборкам // Доклады АН УзССР. 1977. № 2.
113. *Сираждинов С.Х., Ландсман З.М.* Оценка остаточного члена в асимптотическом проведении фишеровской информации, содержащейся в статистиках суммарного вида // Доклады АН СССР. 1977. Т. 232. Вып. 4.
114. *Сираждинов С.Х., Ландсман З.М.* Оценка остаточного члена в асимптотическом выражении для фишеровской информации, содержащейся в статистиках аддитивного вида // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1977. № 2.
115. *Сираждинов С.Х., Сафарбаев И.* Об одной схеме случайного блуждания в Z-мерном пространстве // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1977. № 4.
116. *Сираждинов С.Х., Матвиевская Г.П.* Бируни и его математические труды. М.: Просвещение, 1977.

117. *Сираждинов С.Х., Азларов Т.А., Малевич Т.Л., Нагаев А.В., Фарманов Ш.К.* О монографии Д.В. Маневича «Исследования по предельным распределениям для процессов с перемешиванием» // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1977. № 3.

1978

118. *Сираждинов С.Х., Комеков Б.* О предельном поведении распределения случайно индексированных последовательностей случайных величин // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1978. № 6. С. 28–36.
119. *Сираждинов С.Х., Сафарбаев И.* О случайном блуждании частицы между отражающими экранами // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1978. № 2. С. 78.
120. *Сираждинов С.Х., Гафуров У.* Некоторые обобщения результатов Эрдеша–Каца, связанных с усиленным законом больших чисел, и их приложения // Transactions of Eighth Prague Conference of Information Theory. Vol. B. Prague, 1978 (совм. с. У. Гафуровым).
121. *Сираждинов С.Х., Гафуров М.У.* Некоторые уточнения теорем Эрдеша–Каца, связанных с усиленным законом больших чисел // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1978. № 3.
122. *Сираждинов С.Х., Гафуров М.У., Комеков Б.* Несколько замечаний к усиленному закону больших чисел для сумм случайного числа случайных величин // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1978. № 4.
123. *Сираждинов С.Х., Комеков Б.* Об асимптотическом поведении распределения случайно индексированных случайных величин // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1978. № 6.
124. *Сираждинов С.Х.* О предельном распределении корней многочленов Эйлера // Доклады АН СССР. 1978. Т. 239. Вып. 1.
125. *Сираждинов С.Х.* Об асимптотике для чисел Эйлера // Успехи математических наук. 1978. Т. 33. Вып. 3.
126. *Сираждинов С.Х., Матвиевская Г.П.* Абу Райхон Бируни. М.: Просвещение, 1978.

1979

127. Комплекс ўзгарувчининг функциялари назарияси: Ун-т ва пед. ин-т мех.-мат., физ.-мат. фак. учун ўқув қўлл. Тузатилган 2-нашр. Ташкент: Ўқитувчи, 1979. 368 б.
128. *Сираждинов С.Х., Максудов Ш., Салахиддинов М.* Теория функций комплексного переменного: Учеб. пособие (на узбекском языке).
129. *Сираждинов С.Х.* Предисловие // Из истории науки эпохи Улугбека. Ташкент, 1979. С. 5–9.

130. *Сираждинов С.Х.* О вычислении синуса одного градуса в Самаркандской школе Улугбека // Из истории науки эпохи Улугбека. Ташкент, 1979. С. 65–68.
131. *Сираждинов С.Х., Фарманов Ш.К., Маматкулов О.* Об оптимальных планах статистического приемочного контроля по многомерному количественному признаку // Предельные теоремы, случайные процессы и их приложения. Ташкент, 1979. С. 183–200.
132. *Сираждинов С.Х., Гафуров М.У.* Некоторые обобщения результатов Эрдеша–Каца, связанные с усиленным законом больших чисел, и их приложения // Kybernetika. 1979. Т. 15. Вып. 4. С. 272–292.
133. *Сираждинов С.Х., Фарманов Ш.К.* Предельные теоремы для случайных векторов и величин, связанных в цепь Маркова. Ташкент: Фан, 1979.

1980

134. *Сираждинов С.Х., Матвиевская Г.П., Ахмедов А.* Абу Али ибн Сина и физико-математические науки // Вопросы философии. 1980. № 9. С. 106–111.
135. *Сираждинов С.Х., Маматов М.М.* Теория вероятностей и математическая статистика. Ташкент: Учитель, 1980 (на узбекском языке).

1981

136. *Сираждинов С.Х., Мусамухамедов М.Р.* Об одной математической модели выбора рационального числа семян, высеваемых в одно гнездо при гнездовом посеве // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 1981. Вып. 64. С. 119–127.
137. *Сираждинов С.Х., Вахабов В.* Об оптимальных планах выборочного контроля по количественному признаку // Третья Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике: Тезисы докладов. Вильнюс, 1981. Т. 2. С. 153–154.
138. *Сираждинов С.Х., Сафарбаев И.* Об оценке скорости сходимости в одной схеме случайного блуждания // Третья Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике: Тезисы докладов. Вильнюс, 1981. Т. 2. С. 155–156.
139. *Сираждинов С.Х., Ахмедов А.А.* Физико-математические воззрения Абу Али ибн Сины // Абу Али ибн Сина и естественные науки. Ташкент, 1981. С. 87–95.
140. *Sirazhdinov S.Kh.* On Euler numbers and Euler polynomial roots // Lecture Notes in Computer Science. 1981. Vol. 122. P. 464.

1982

141. *Сираждинов С.Х., Сафарбаев И.* О диффузионном приближении случайных блужданий с отражением // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1982. № 1. С. 29–34.

142. *Сираждинов С.Х., Сафарбаев И.* Об аппроксимации многомерных случайных блужданий с отражением // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1982. № 5. С. 7–11.
133. *Sirazhdinov S. Kh., Landsman Z.M.* A description of some classes of families of distribution when the lower bound of Fisher information can be attained // 4th USSR-Japan symposium on probability and mathematical statistics, vol. 2. Tbilisi, 1982. P. 216–217.

1983

134. *Сираждинов С.Х., Матвиевская Г.П.* Ал-Хорезми – Выдающийся математик и астроном средневековья. М.: Просвещение, 1983. 79 с.
135. *Сираждинов С.Х., Матвиевская Г.П.* Ал-Хорезми и его «Алгебра» // Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми: К 1200-летию со дня смерти. М., 1983. С. 75–94.
136. *Сираждинов С.Х., Матвиевская Г.П.* Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми и его вклад в историю науки // Вопросы истории естествознания и техники. 1983. № 1. С. 108–119.
137. *Сираждинов С.Х., Фарманов Ш.К.* Об оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме для однородных цепей Маркова // Теория вероятностей и ее применения. 1983. Т. 28. Вып. 2. С. 219–228.
138. *Сираждинов С.Х., Сафарбаев И.* Об оценке скорости сходимости в одной схеме случайного блуждания // Случайные процессы и математическая статистика. Ташкент, 1983. С. 174–180.
139. *Сираждинов С.Х., Вахабов В., Цэренбат О.* Об оптимальных планах контроля по многомерному количественному признаку при известном начальном распределении // Случайные процессы и математическая статистика. Ташкент, 1983. С. 181–187.
140. *Сираждинов С.Х.* Предисловие // Мухаммад Ибн Муса ал-Хорезми. Математические трактаты. Ташкент, 1983. С. 3–4.
141. *Сираждинов С.Х., Азларов Т.А.* Теория вероятностей и математическая статистика // Академия Наук УзССР. Ташкент, 1983. С. 39–47.
142. *Сираждинов С.Х., Кабулов В.К., Азларов Т.А.* Прикладные вопросы математики и алгоритмизации в механике сплошных сред // Академия Наук УзССР. Ташкент, 1983. С. 122–131.
143. *Sirazhdinov S.Kh., Landsman Z.M.* The classes of distribution families with the lower bound of Fisher information and its meaning in the statistical estimation // Lecture Notes Math. 1983. Vol. 1821. P. 637–646.

1984

144. *Сираждинов С.Х., Сафарбаев И.* Об одной схеме случайного блуждания частицы между отражающими стенками // Доклады АН УзССР. 1984. № 1. С. 3–4.

145. *Сираждинов С.Х., Расулов А.С., Бакоев М.Т.* Статистический анализ датчиков равномерно распределенных случайных чисел // Алгоритмы. Ташкент, 1984. Вып. 54. С. 3–5.

1985

146. *Сираждинов С.Х., Вахобов В.* Об асимптотике оптимальных параметров минимаксных решающих правил // Четвертая Международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике: Тезисы докладов. Вильнюс, 1985. Т. 3. С. 125–127.
147. *Сираждинов С.Х., Гафуров М.У.* Некоторые замечания по поводу закона больших чисел для дискретных случайных полей // Четвертая Международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике: Тезисы докладов. Вильнюс, 1985. Т. 3. С. 128–130.

1986

148. *Сираждинов С.Х., Вахобов В.* Об асимптотике оптимальных параметров минимаксных решающих правил с двумя решениями // Доклады АН УзССР. 1986. № 2. С. 3–5.
149. *Сираждинов С.Х., Золоторев В.М.* От редакторов: предисловие // Вероятностные распределения и математическая статистика. Ташкент, 1986. С. 3.
150. *Сираждинов С.Х., Мирвалиев М.* Оценка среднего содержания полезного компонента методом интерполяции результатов опробования // Первый Всемирный конгресс по теории вероятностей и математической статистике им. Бернулли: Тезисы докладов. М., 1986. Т. 1. С. 390.
151. *Sirazhdinov S.Kh.* Some probability methods in asymptotic problems of combinatorial analysis // Первый Всемирный конгресс по теории вероятностей и математической статистике им. Бернулли: Тезисы докладов. М., 1986. Т. 2. С. 493.
152. *Sirazhdinov S. Kh., Mirakhmedov Sh.A., Ismatullaev Sh.A.* Large derivations for randomized decomposable statistics // Первый Всемирный конгресс по теории вероятностей и математической статистике им. Бернулли: Тезисы докладов. М., 1986. Т. 2. С. 770.
153. *Сираждинов С.Х., Гнеденко Б.В.* Д. Бернулли и теория вероятностей // Бернулли – ученые и общество Бернулли. М., 1986. С. 24–37.

1987

154. *Сираждинов С.Х., Гафуров М.У.* Метод рядов в граничных задачах для случайных блужданий. Ташкент: Фан, 1987. 137 с.
155. *Сираждинов С.Х., Мирахмедов Ш.А., Исматуллаев Ш.А.* Вероятности уклонений для рандомизированных разделимых статистик в полиномной схеме // Доклады АН СССР. 1987. Т. 279. № 5. С. 1062–1064.

1988

156. *Сираждинов С.Х., Рахимов И.* Аппроксимация распределения суммы в одной схеме суммирования независимых случайных величин // Доклады АН СССР. 1988. Т. 301. № 1. С. 31–34.
157. *Сираждинов С.Х.* Аппроксимация распределения суммы в одной схеме суммирования независимых случайных величин // Асимптотические методы в теории вероятностей и математической статистике. Ташкент, 1988. С. 136–151.
158. *Сираждинов С.Х., Вахабов В.* Байесовский однократный выборочный план, основанный на линейных стоимостях и распределении А.Н. Колмогорова: 1 // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1988. № 6. С. 35–41.
159. *Sirazhdinov S.Kh., Alexandrov A.D., Demidov S.S., Grigorian A.T. at al.* Boris A. Rozenfeld: On the 70th anniversary of his birth // Historiya Mathematica. 1988. Vol. 15. P. 1–8.

1989

160. *Сираждинов С.Х., Вахабов В.* Байесовский простой выборочный план, основанный на линейных стоимостях и распределении А.Н. Колмогорова: 2 // Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. 1989. № 3. С. 44–51.
161. *Sirazhdinov S.Kh., Rakhimov I.* Approximation of the distribution of a sum in a certain scheme for summation of independent random variables // Soviet Mathematical Reports. 1989. Vol. 38, no. 1. P. 23–27.
162. *Сираждинов С.Х., Мирахмедов Ш.А., Исматуллаев Ш.А.* Вероятности больших уклонений для рандомизированных разделимых статистик в полиномиальной схеме // Теория вероятностей и ее применения. 1989. Т. 34. № 4. С. 716–718.

Заключение

Ш.К. Фарманов является самым верным и благодарным учеником Сагди Хасановича; второй автор этой статьи, В.К. Жаров, также себя считает его учеником, поскольку мэтр повлиял на его научные исследования, сыграл решающую роль в выборе жизненного пути. Порой не хватает слов высказать всю свою благодарность Человеку просто потому, что эмоции плохо описываются словами, как бы мы ни пытались их описать. Сложившаяся ситуация как раз такова. Наша память и благодарность Учителю огромны и будут всегда с нами.

Afterword

Sh.K. Farmanov is the most faithful and grateful student of Sagdi Hasanovich; the second author of this article – V.K. Zharov also considers himself to be his student, since the master influenced his scientific research and played a decisive role in choosing the life path. Sometimes there are not enough words to express all our gratitude to a person simply because emotions are poorly described by words, no matter how we would try to describe them. The current situation is just that. Our memory and gratitude to the Teacher are huge and will always be with us.

Информация об авторах

Шакир К. Фарманов, доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Республики Узбекистан, Институт математики им. В.И. Романовского АН Республики Узбекистан, Ташкент, Республика Узбекистан; 100125, Республика Узбекистан, Ташкент, пр. Дурмон Йули, д. 29; shakirformanov@yandex.com

Валентин К. Жаров, доктор педагогических наук, профессор, Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия; 125993, Россия, Москва, Миусская пл., д. 6; valcon@mail.ru

Information about the authors

Shakir K. Farmanov, Dr. of Sci. (Mathematics), professor, Full Member of Academy of Sciences of Republic of Uzbekistan, Romanovsky Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Republic of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan; bld. 29, Durmon Yoli Av., Tashkent, Republic of Uzbekistan, 100125; shakirformanov@yandex.com

Valentin K. Zharov, Dr. of Sci. (Education), professor, Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia; bld. 6, Miusskaya Sq., Moscow, Russia, 125993; valcon@mail.ru

УДК 517.9
DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-75-101

Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высокого порядка в многомерном случае

Камиль Б. Сабитов
Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований Республики Башкортостан (Стерлитамакский филиал ИСИ РБ), Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия, sabitov_fmf@mail.ru

Шакирбай Г. Касимов
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкентский филиал НИЯУ МИФИ, Ташкент, Узбекистан, shokiraka@mail.ru

Умрбек С. Мадрахимов
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан, umadraximov@mail.ru

Аннотация. В данной работе изучена задача с начальными и граничными условиями для одного из классов дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка от многих переменных. Решение начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи. У спектральной задачи найдены собственные значения и построена соответствующая система собственных функций. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в пространстве Соболева. На основании полноты системы собственных функций доказана теорема о единственности решения задачи. В рамках классов Соболева доказано существование регулярного решения поставленной начально-граничной задачи.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных высокого порядка, дробная производная по времени, начально-граничная задача, спектральный метод, собственные значения, собственные функции, полнота, базис Рисса, единственность, существование, ряд

Для цитирования: Сабитов К.Б., Касимов Ш.Г., Мадрахимов У.С. Начально-граничная задача для уравнения в частных производных высокого порядка в многомерном случае // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2020. № 1. С. 75–101. DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-75-101

Initial boundary value problem for a high order partial differential equation in multidimensional case

Kamil' B. Sabitov
Sterlitamak branch of the Institute for Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan (Sterlitamak branch of ISI RB), Sterlitamak branch of Bashkir State University Sterlitamak, Russia, sabitov_fmf@mail.ru

Shakirbai G. Kasimov
Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan, Tashkent branch of NRNU MEPhI, Tashkent, Uzbekistan, shokiraka@mail.ru

Umrbek S. Madrahimov
Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, umadraximov@mail.ru

Abstract. In this paper study a problem with initial and boundary conditions for one of the classes of high-order partial differential equations in many variables is studied. The solution of the initial boundary-value problem is constructed as the sum of a series over the system of eigenfunctions for the multidimensional spectral problem. The eigenvalues are found for the spectral problem and the corresponding system of eigenfunctions is constructed. It is shown that this system of eigenfunctions is complete and forms a Riesz basis in the Sobolev space. Based on the completeness of the system of eigenfunctions, a uniqueness theorem for the solution of the problem is proved. In the framework of the Sobolev classes, the existence of a regular solution to the stated initial-boundary problem is proved.

Keywords: High-order partial differential equation, fractional time derivative, initial-boundary value problem, spectral method, eigenvalues, eigenfunctions, completeness, Riesz basis, uniqueness, series

For citation: Sabitov, K.B., Kasimov, Sh.G. and Madrahimov, U.S. (2020), "Initial boundary value problem for a high order partial differential equation in multidimensional case", *RSUH/RGGU Bulletin. "Information Science. Information Security. Mathematics" Series,* no 1, pp. 75–101, DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-75-101

Постановка задачи

Многие задачи о колебаниях балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка [Тихонов, Самарский 1977], [Стретт 1955], [Тимошенко, Янг, Уивер 1985], [Коренев 1965], [Коллатц 1968], [Гулд 1970]. Отметим также, что к уравнению колебаний балки приходят во многих задачах при расчете устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [Крылов 2012].

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение с дробной производной

$$D_{0t}^{\alpha}u(y,t)+a^2\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^{4m}u(y,t)}{\partial y_j^{4m}}=f(y,t),\quad (y,t)\in\Pi\times(0,T),\quad p-1<\alpha\le p \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$D_{0t}^{\alpha-i}u(y,t)\Big|_{t=0}=\varphi_i(y),\quad i=1,2,...,p, \quad (2)$$

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial^{4k}u(y,t)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial^{4k+1}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=0}=0,\\ \left.\dfrac{\partial^{4k}u(y,t)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=l}=0,\ \left.\dfrac{\partial^{4k+1}u(y,t)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=l}=0,\ k=\overline{0,m-1},\ j=\overline{1,N},\end{cases} \quad (3)$$

которое при $a = p = 2$, $N = m = 1$ имеет приложения в строительной механике, здесь $(y, t) = (y_1, ..., y_j, ..., y_N,t)\in\prod \times (0,T)$, $\prod = (0,l)\times...\times(0,l)$, $N, m, p\in\prod$, $l, T > 0$ – заданные положительные числа и $f(y,t)$, $\varphi_i(y)$, $i = 1, 2, ..., p$ – достаточно гладкие функции, разлагаемые по собственным функциям $\{v_n(y), n\in\prod^N\}$ спектральной задачи:

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^{4m}v(y)}{\partial y_j^{4m}}-\lambda v(y)=0 \quad (4)$$

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial^{4k}v(y)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial^{4k+1}v(y)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=0}=0,\\ \left.\dfrac{\partial^{4k}v(y)}{\partial y_j^{4k}}\right|_{y_j=l}=0,\ \left.\dfrac{\partial^{4k+1}v(y)}{\partial y_j^{4k+1}}\right|_{y_j=l}=0,\ k=\overline{0,m-1},\ j=\overline{1,N},\end{cases} \quad (5)$$

λ – спектральный параметр.

Здесь при $\alpha < 0$ дробная интеграл имеет вид

$$D_{at}^{\alpha}u(y,t)=\frac{sign(t-a)}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^t\frac{u(y,\tau)\cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha+1}},$$

при $\alpha = 0$ $D_{\mathrm{at}}^{\alpha}u(y,t) = u(y,t)$, а при $p-1 < \alpha \leqslant p$, $p\in\prod$ дробная производная определяется по формуле

$$D_{at}^{\alpha}u(y,t)=sign^{p}(t-a)\frac{d^{p}}{dt^{p}}D_{at}^{\alpha-p}u(y,t)=\frac{sign^{p+1}(t-a)}{\Gamma(l-\alpha)}\frac{d^{p}}{dt^{p}}\int_{a}^{t}\frac{u(y,\tau)\cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-p+1}}.$$

В работах [Сабитов 2015], [Сабитов 2017a], [Сабитов 2017b] для уравнения балки, т. е. для уравнения (1) при $\alpha = 2$, $m = 1$, $N = 1$ изучены начально-граничные задачи. В данной работе на основании работ [Сабитов 2015], [Касимов, Атаев, Мадрахимов 2016], [Kasimov, Ataev 2018] получена теорема единственности и существования решения задачи (1)–(3) в пространстве Соболева. Решение построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи (4), (5).

Полнота системы собственных функций в классах Соболева

Будем искать собственные функции задачи (4), (5) в виде произведения $v(y)=\prod_{i=1}^{N}X_i(y_i)$. Тогда для определения каждого $X_i(y_i)$, $i=\overline{1,N}$ получаем одномерную спектральную задачу вида:

$$X^{(4m)}(x)-\lambda X(x)=0,\ 0<x<l, \tag{6}$$

$$X^{(4k)}(0)=X^{(4k+1)}(0)=X^{(4k)}(l)=X^{(4k+1)}(l)=0,\ \ k=\overline{0,m-1}. \tag{7}$$

Здесь для простоты $X_i\,(y_i)$ обозначены через $X\,(x)$.

Введем пространство $W_2^s(0,l)$ с нормой

$$\|f\|^2_{W_2^s(0,l)}=\|f\|^2_{L_2(0,l)}+\left\|D^s f\right\|^2_{L_2(0,l)},$$

где s – произвольное натуральное число, при этом $W_2^0(0,l) = L_2(0,l)$.

Обозначим через L дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $l(X) = X^{(4m)}(x)$ на пространстве $W_2^{4m}(0,l)$ функций $X\,(x)$, удовлетворяющих граничным условиям (7). Такое пространство обозначим через $\overset{\circ}{V}{}_2^{4m}(0,l)$.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Оператор $LX = X^{(4m)}(x)$ с областью определения*

$$D(L)=\left\{X\left(x\right):\,X\left(x\right)\in W_2^{4m}(0,l),\right.$$

$$X^{(4k)}(0)=X^{(4k+1)}(0)=X^{(4k)}(l)=X^{(4k+1)}(l)=0,\quad k=0,1,\ldots,m-1\}$$

является положительным и симметрическим оператором в пространстве $L_2\,(0,l)$.

Доказательство. Оператор L является положительным в пространстве $L_2\,(0,l)$. Действительно,

$$(LX,X)=\int_0^l LX\cdot\overline{X(x)}dx=\int_0^l X^{(4m)}(x)\cdot\overline{X(x)}dx=$$

$$=X^{(4m-1)}(x)\overline{X(x)}\Big|_0^l-\int_0^l X^{(4m-1)}(x)\cdot\overline{X'(x)}dx=X^{(4m-1)}(x)\overline{X(x)}\Big|_0^l-$$

$$-X^{(4m-2)}(x)\overline{X'(x)}\Big|_0^l+\int_0^l X^{(4m-2)}(x)\cdot\overline{X''(x)}dx=$$

$$=\ldots=X^{(4m-1)}(x)\overline{X(x)}\Big|_0^l-X^{(4m-2)}(x)\overline{X'(x)}\Big|_0^l+$$

$$+\cdots+X^{(2m+1)}(x)\overline{X^{(2m-2)}(x)}\Big|_0^l-X^{(2m)}(x)\overline{X^{(2m-1)}(x)}\Big|_0^l+$$

$$+\int_0^l X^{(2m)}(x)\cdot\overline{X^{(2m)}(x)}dx=\int_0^l\left|X^{(2m)}(x)\right|^2dx\geq 0.$$

Следовательно, каждое собственное значение оператора L является неотрицательным.

Нетрудно видеть, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (6), (7). В этом случае из уравнения (6) найдем его общее решение

$$X(x)=C_1\frac{x^{4m-1}}{(4m-1)!}+C_2\frac{x^{4m-2}}{(4m-2)!}+\cdots+C_{4k}\frac{x^{4m-4k}}{(4m-4k)!}+\cdots+C_{4m}\,,\quad (8)$$

где C_i – произвольные постоянные. Подставляя функцию (8) в первые два условия из (7), находим

$$X^{(4k)}(0)=C_{4(m-k)}=0,\;\; X^{(4k+1)}(0)=C_{4(m-k)-1}=0,\quad k=\overline{0,m-1}.$$

Затем, удовлетворив общее решение (8) последним двум граничным условиям из (7), получим

$$\begin{cases} C_1\dfrac{l^{4(m-k)-1}}{(4(m-k)-1)!}+C_2\dfrac{l^{4(m-k)-2}}{(4(m-k)-2)!}+\cdots+C_{4(m-k)-3}\dfrac{l^3}{3!}+C_{4(m-k)-2}\dfrac{l^2}{2!}=0,\\ C_1\dfrac{l^{4(m-k)-2}}{(4(m-k)-2)!}+C_2\dfrac{l^{4(m-k)-3}}{(4(m-k)-3)!}+\cdots+C_{4(m-k)-3}\dfrac{l^2}{2!}+C_{4(m-k)-2}\dfrac{l}{1!}=0\end{cases}\quad (9)$$

при $k = 0, 1, ..., m-1$. Если $k = m-1$, то из (9) получим

$$\begin{cases} C_1\dfrac{l^3}{3!}+C_2\dfrac{l^2}{2!}=0, \\ C_1\dfrac{l^2}{2!}+C_2\dfrac{l}{1!}=0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Если $k = m-2$, то из (9) получим

$$\begin{cases} C_5\dfrac{l^3}{3!}+C_6\dfrac{l^2}{2!}=0, \\ C_5\dfrac{l^2}{2!}+C_6\dfrac{l}{1!}=0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $C_5 = 0$, $C_6 = 0$. Аналогично, продолжая этот процесс, имеем $C_9 = 0$, $C_{10} = 0$, $C_{13} = 0$, $C_{14} = 0$, ..., $C_{4m-3} = 0$, $C_{4m-2} = 0$. Отсюда получим $C_{4(m-k)-3} = 0$, $C_{4(m-k)-2} = 0$, для всех $k = 0, 1, ..., m-1$, т. е. $X(x) = 0$. Следовательно, $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (6), (7).

Далее, оператор L является симметрическим оператором в пространстве $L_2(0,l)$. Действительно, если функции f и g принадлежат области $D(L)$, то $Lf \in L_2(0,l)$ и $Lg \in L_2(0,l)$. Далее, функции f и g удовлетворяют граничным условиям:

$$f^{(4k)}(0) = f^{(4k+1)}(0) = f^{(4k)}(l) = f^{(4k+1)}(l) = 0,$$
$$g^{(4k)}(0) = g^{(4k+1)}(0) = g^{(4k)}(l) = g^{(4k+1)}(l) = 0$$

при $k = 0, 1, ..., m-1$. Таким образом,

$$(Lf,g)=\int_0^l Lf\cdot\overline{g(x)}dx=\int_0^l f^{(4m)}(x)\cdot\overline{g(x)}dx=f^{(4m-1)}(x)\overline{g(x)}\Big|_0^l-$$

$$-\int_0^l f^{(4m-1)}(x)\cdot\overline{g'(x)}dx=f^{(4m-1)}(x)\overline{g(x)}\Big|_0^l-f^{(4m-2)}(x)\overline{g'(x)}\Big|_0^l+$$

$$+\int_0^l f^{(4m-2)}(x)\cdot\overline{g''(x)}dx=\cdots=f^{(4m-1)}(x)\overline{g(x)}\Big|_0^l-f^{(4m-2)}(x)\overline{g'(x)}\Big|_0^l+$$

$$+\cdots+f'(x)\overline{g^{(4m-2)}(x)}\Big|_0^l-f(x)\overline{g^{(4m-1)}(x)}\Big|_0^l+\int_0^l f(x)\cdot\overline{g^{(4m)}(x)}dx=(f,Lg)$$

при $k = 0, 1, ..., m-1$.

Итак, $(Lf, g) = (f, Lg)$, $\forall f, g \in D(L)$. Лемма 1 доказана.

Пусть $\lambda = d^{4m}$, $d > 0$. Тогда для (6) характеристическое уравнение имеет вид:

$$\mu^{4m} - d^{4m} = 0.$$

Корни этого уравнения определяются по формуле

$$\mu_j = de^{i\frac{j\pi}{2m}},\ j = \overline{0, 4m-1}.$$

Для оператора L справедливо следующее равенство:

$$L - d^{4m}I = \frac{d^{4m}}{dx^{4m}} - d^{4m}I = \prod_{j=0}^{4m-1}\left(\frac{d}{dx} - \mu_j I\right) = \prod_{j=0}^{2m-1}\left(\frac{d^2}{dx^2} - \mu_j^2 I\right) =$$
$$= \prod_{j=0}^{m-1}\left(\frac{d^4}{dx^4} - \mu_j^4 I\right) = \left(\frac{d^4}{dx^4} - d^4 I\right)\prod_{j=1}^{m-1}\left(\frac{d^4}{dx^4} - \mu_j^4 I\right). \quad (10)$$

Здесь $\mu_j^4 = d^4 \cdot e^{i\frac{2j\pi}{m}}, j = 1,\ldots,m-1$ не являются положительными числами. Из равенства (10) следует, что оператор $LX = X^{(4m)}(x)$ с областью определения $D(L)$ имеет собственную функцию $X = X(x)$ в том и только в том случае, когда функция $X(x)$ является нетривиальным решением задачи следующего вида:

$$X^{(4)}(x) = d^4X(x),\ 0 < x < l, \quad (11)$$
$$X(0) = X'(0) = X(l) = X'(l) = 0. \quad (12)$$

Действительно, пусть $X^{(4m)}(x) = d^{4m}X(x)$, $X(x) \in D(L)$ и $X(x) \neq 0$ не является решением задачи (11), (12). Тогда

$$\prod_{j=0}^{m-1}\left(\frac{d^4}{dx^4} - \mu_j^4 I\right)X = 0,\ X(x) \in D(L),\ X(x) \neq 0$$

или

$$\prod_{j=1}^{m-1}\left(\frac{d^4}{dx^4} - \mu_j^4 I\right)\left(\frac{d^4}{dx^4} - d^4 I\right)X = 0,\ X(x) \in D(L),\ X(x) \neq 0.$$

Так как спектральная задача (11), (12) имеет только положительные собственные числа, то

$$\prod_{j=2}^{m-1}\left(\frac{d^4}{dx^4} - \mu_j^4 I\right)\left(\frac{d^4}{dx^4} - d^4 I\right)X \equiv 0,\ X(x) \in D(L),\ X(x) \neq 0.$$

Аналогично

$$\prod_{j=3}^{m-1}\left(\frac{d^4}{dx^4}-\mu_j^4 I\right)\left(\frac{d^4}{dx^4}-d^4 I\right)X\equiv 0, X(x)\in D(L),\ X(x)\neq 0.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\left(\frac{d^4}{dx^4}-d^4 I\right)X\equiv 0,\ X(x)\in D(L),\ X(x)\neq 0.$$

Это противоречие доказывает утверждение. Итак, оператор $LX = X^{(4m)}(x)$ с областью определения $D(L)$ имеет собственную функцию $X(x)$ только в том случае, когда функция $X(x)$ является нетривиальным решением задачи (11), (12). Следовательно, вместо спектральной задачи (6), (7) мы получаем спектральную задачу (11), (12).

На основании работ [Будак, Самарский, Тихонов 1980], [Сабитов 2015] числа d являются положительными корнями трансцендентного уравнения

$$ch dl \bullet \cos dl = 1. \tag{13}$$

Графическим методом нетрудно показать существование счетного множества положительных корней этого уравнения:

$$0<d_1<d_2<\ldots<d_n<\ldots,$$

при этом при больших n справедлива асимптотическая формула

$$d_n=\frac{\pi n}{l}+\frac{\pi}{2l}+O\left(e^{-2\pi n}\right). \tag{14}$$

Соответствующая система собственных функций имеет вид

$$\bar{\bar{X}}_n(x)=-\frac{\left|\sin d_n l\right|-\sin d_n l\cos d_n l}{1-\cos^2 d_n l}\left(ch d_n x-\cos d_n x\right)+sh d_n x-\sin d_n x. \tag{15}$$

Из формулы (15) в зависимости от четности и нечетности числа n получим соответствующую систему ортонормированных в $L_2(0,l)$ собственных функций

$$\tilde{X}_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{l}\left|tg\dfrac{d_n l}{2}\right|}\left(\dfrac{sh d_n(x-\frac{l}{2})}{ch\dfrac{d_n l}{2}}-\dfrac{\sin d_n(x-\frac{l}{2})}{\cos\dfrac{d_n l}{2}}\right), & n=2i,\ i=1,2,\ldots,\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{l}\left|ctg\dfrac{d_n l}{2}\right|}\left(\dfrac{ch d_n(x-\frac{l}{2})}{sh\dfrac{d_n l}{2}}+\dfrac{\cos d_n(x-\frac{l}{2})}{\sin\dfrac{d_n l}{2}}\right), & n=2i-1,\ i=1,2,\ldots\end{cases} \tag{16}$$

Оператор $LX = X^{(4m)}(x)$ с областью определения $D(L)$ имеет собственную функцию $X(x)$ только в том случае, когда функция $X(x)$ является нетривиальным решением задачи (11), (12). Следовательно, получаем собственные значения задачи (6), (7) по формуле $\lambda_n = d_n^{4m}$, $n = 1, 2, \dots$, где d_n – корень уравнения (13), а собственные функции по формуле (16). Действительно, это можно видеть, непосредственно вычисляя производные функции $\tilde{X}_n(x)$, т. е.

$$\tilde{X}_n^{(4m)}(x) = d_n^{4m}\tilde{X}_n(x),\ 0 < x < l$$

и

$$\tilde{X}_n^{(4k)}(0) = d_n^4\tilde{X}_n^{(4k-4)}(0) = \ldots = d_n^{4k}\tilde{X}_n(0) = 0,\ k = \overline{1,\ m-1},$$

$$\tilde{X}_n^{(4k+1)}(0) = d_n^4\tilde{X}_n^{(4k-3)}(0) = \ldots = d_n^{4k}\tilde{X}_n'(0) = 0,\ k = \overline{1,\ m-1},$$

$$\tilde{X}_n^{(4k)}(l) = d_n^4\tilde{X}_n^{(4k-4)}(l) = \ldots = d_n^{4k}\tilde{X}_n(l) = 0,\ k = \overline{1,\ m-1},$$

$$\tilde{X}_n^{(4k+1)}(l) = d_n^4\tilde{X}_n^{(4k-3)}(l) = \ldots = d_n^{4k}\tilde{X}_n'(l) = 0,\ k = \overline{1,\ m-1}.$$

Пусть

$$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1+d_n^{4s}}}\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{l}\left|tg\dfrac{d_nl}{2}\right|}\left(\dfrac{shd_n(x-\frac{l}{2})}{ch\dfrac{d_nl}{2}} - \dfrac{\sin d_n(x-\frac{l}{2})}{\cos\dfrac{d_nl}{2}}\right), & n = 2i,\ i = 1,2,\dots, \\ \dfrac{1}{\sqrt{l}\left|ctg\dfrac{d_nl}{2}\right|}\left(\dfrac{chd_n(x-\frac{l}{2})}{sh\dfrac{d_nl}{2}} + \dfrac{\cos d_n(x-\frac{l}{2})}{\sin\dfrac{d_nl}{2}}\right), & n = 2i-1,\ i = 1,2,\ldots \end{cases} \qquad (17)$$

соответствующая система собственных функций задачи (6), (7).

Справедлива следующая

Лемма 2. *Собственные функции* $X_n(x)$ *оператора* L, *соответствующие различным собственным значениям* $\lambda_n = d_n^{4m}$, $n = 1,2, \dots$, *ортонормальны в классе* $W_2^{2s}(0,l)$, $s = 1,2, \dots$.

Доказательство. Пусть $X_n(x)$ – собственная функция оператора L, соответствующая собственному значению λ_n, а $X_k(x)$ – собственная функция оператора L, соответствующая собственному значению λ_k. Это значит, что

$$LX_n = \lambda_n X_n,\ LX_k = \lambda_k X_k.$$

Отсюда

$$(LX_n, X_k) = (\lambda_n X_n, X_k) = \lambda_n (X_n, X_k),\ (X_n, LX_k) = (X_n, \lambda_k X_k) = \overline{\lambda_k}(X_n, X_k).$$

Но в силу симметричности оператора L справедливы равенства $(LX_n, X_k) = (X_n, LX_k)$, $\overline{\lambda_k} = \lambda_k$. Поэтому, вычитая почленно предыдущие два равенства, получим

$$(\lambda_n - \lambda_k)(X_n, X_k) = 0,$$

т. е. собственные функции $X_n(x)$ и $X_k(x)$ симметрического оператора L, соответствующие различным собственным значениям λ_n и λ_k, ортогональны в $L_2\,(0,l)$.

Отсюда в силу равенства $X_n^{(4)} = d_n^4 X_n$ получаем

$$\left(X_n''(x), X_k''(x)\right) = X_n''(x)X_k'(x)\Big|_0^l - X_n'''(x)X_k(x)\Big|_0^l +$$

$$+d_n^4\left(X_n(x), X_k(x)\right) = d_n^4\left(X_n(x), X_k(x)\right) = 0.$$

Далее, имеем следующие равенства:

$$\left(X_n^{(4)}, X_k^{(4)}\right) = d_n^4 d_k^4\left(X_n, X_k\right) = 0, \quad \left(X_n^{(6)}, X_k^{(6)}\right) = d_n^4 d_k^4\left(X_n'', X_k''\right) = 0.$$

Аналогично $(X_n^{(2s)}, X_k^{(2s)}) = 0$. Действительно, если $s = 2i$, то

$$\left(X_n^{(2s)}, X_k^{(2s)}\right) = d_n^{4i} d_k^{4i}\left(X_n, X_k\right) = 0.$$

Если $s = 2i + 1$, тогда

$$\left(X_n^{(2s)}, X_k^{(2s)}\right) = d_n^{4i} d_k^{4i}\left(X_n'', X_k''\right) = 0.$$

Итак, $(X_n, X_k)_{W_2^{2s}(0,l)} = 0$ при $n \neq k$.

Отсюда по определению нормы в пространстве Соболева $W_2^{2s}(0,l)$ верно равенство

$$\left\|X_n(x)\right\|^2_{W_2^{2s}(0,l)} = \left\|X_n(x)\right\|^2_{L_2(0,l)} + \left\|D^{2s}X_n(x)\right\|^2_{L_2(0,l)} = \frac{1}{1+d_n^{4s}} + \frac{d_n^{4s}}{1+d_n^{4s}} = 1.$$

Лемма 2 доказана.

Обозначим через $\overset{\circ}{V}{}_2^{2s}(0,l)$ множество всех функций $f(x) \in W_2^{2s}(0,l)$, удовлетворяющих граничным условиям $f^{(4k)}(0) = f^{(4k+1)}(0) = f^{(4k)}(l) = f^{(4k+1)}(l) = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, \left[\dfrac{s+1}{2}\right] - 1$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Система собственных функций (17) спектральной задачи (6) и (7) является полной ортонормированной системой в классе Соболева* $\overset{\circ}{V}{}_2^{2s}(0,l)$.

Доказательство. Как известно из теории дифференциальных операторов [Наймарк 1969], система собственных функций $X_n(x)$ самосопряженного оператора L является полной ортогональной системой в пространстве $L_2\ (0,l)$. Из равенства $X_n^{(4s)}(x) = d_n^{4s}X_n(x)$ получаем $(X_n^{(4s)},X_m^{(4s)}) = 0$. Следовательно, система функций (17) является полной ортонормированной системой в пространстве $\overset{\circ}{V}{}_2^{4s}(0,l)$. Действительно, пусть выполняются условия $(f,X_n)_{W_2^{4s}(0,l)} = 0$ при всех натуральных n и для функции $f \in W_2^{4s}(0,l)$, удовлетворяющей граничным условиям $f^{(4k)}(0) = f^{(4k+1)}(0) = f^{(4k)}(l) = f^{(4k+1)}(l) = 0$ при $k = 0, 1 ..., s - 1$. Тогда $(f, X_n) + (f^{(4s)}, X_n^{(4s)}) = 0$ при всех натуральных n. Далее, интегрируя по частям, получим $(f, X_n) + (f, X_n^{(8s)}) = 0$ при всех натуральных n. Отсюда в силу равенства $X_n^{(4s)} = d_n^{4s}X_n$ имеем $(f, X_n) + (f, d_n^{8s}X_n)$, т. е. $(f, X_n) = 0$ при всех натуральных n. Из полноты системы собственных функций $X_n(x)$ в пространстве $L_2\ (0,l)$ следует, что $f = 0$. Отсюда получим, что система собственных функций (17) является полной ортонормированной системой в пространстве $\overset{\circ}{V}{}_2^{4s}(0,l)$.

Если $f(x) \in \overset{\circ}{V}{}_2^{2s}(0,l)$, то существует последовательность функций $g_m(x) \in \overset{\circ}{V}{}_2^{4s}(0,l)$, такая, что

$$\|g_m(x) - f(x)\|_{W_2^{2s}(0,l)} \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

где ряд $g_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(m)} X_n(x)$ сходится по норме пространства $W_2^{4s}(0,l)$. Отсюда для любой функции $f(x) \in \overset{\circ}{V}{}_2^{2s}(0,l)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность функций $g_m(x) \in \overset{\circ}{V}{}_2^{4s}(0,l)$, для которой выполняется неравенство

$$\|g_m(x) - f(x)\|_{W_2^{2s}(0,l)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N_m(\varepsilon)$, такой, что для любых $N \geqslant N_m(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left\| g_m(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(m)} X_n(x) \right\|_{W_2^{4s}(0,l)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Введем пространство Соболева $H^s(0,l)$ с нормой

$$\|f(x)\|^2_{H^s(0,l)} = \sum_{0\le k\le s} \|D^k f(x)\|^2_{L_2(0,l)},$$

где s – натуральное число. Из эквивалентности норм пространств $H^s(0,l)$ и $W_2^s(0,l)$ имеем неравенства

$$c_1\|f(x)\|_{W_2^s(0,l)} \le \|f(x)\|_{H^s(0,l)} \le c_2\|f(x)\|_{W_2^s(0,l)}, \tag{18}$$

где c_i – здесь и далее положительные постоянные. Отсюда следует

$$\left\|g_m(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(m)} X_n(x)\right\|_{H^{4s}(0,l)} \le c_2 \left\|g_m(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(m)} X_n(x)\right\|_{W_2^{4s}(0,l)} < c_2\frac{\varepsilon}{2}.$$

Используя вложение пространства $H^{4s}(0,l)$ в пространство $H^{2s}(0,l)$, имеем оценку

$$\left\|g_m(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(m)} X_n(x)\right\|_{H^{2s}(0,l)} \le \left\|g_m(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(m)} X_n(x)\right\|_{H^{4s}(0,l)} < c_2\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку

$$\|g_m(x) - f(x)\|_{H^{2s}(0,l)} \le c_2\|g_m(x) - f(x)\|_{W_2^{2s}(0,l)} < c_2\frac{\varepsilon}{2},$$

следовательно, используя неравенство треугольника, получим

$$\left\|f(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(m)} X_n(x)\right\|_{H^{2s}(0,l)} \le \|f(x) - g_m(x)\|_{H^{2s}(0,l)} +$$

$$+\left\|g_m(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(m)} X_n(x)\right\|_{H^{2s}(0,l)} < c_2\frac{\varepsilon}{2} + c_2\frac{\varepsilon}{2} = c_2\varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\left\|f(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(m)} X_n(x)\right\|_{W_2^{2s}(0,l)} < \frac{1}{c_1}\left\|f(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(m)} X_n(x)\right\|_{H^{2s}(0,l)} < \frac{c_2}{c_1}\varepsilon,$$

т. е.

$$\left\|f(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(m)} X_n(x)\right\|_{W_2^{2s}(0,l)} < \frac{c_2}{c_1}\varepsilon.$$

Следовательно, система собственных функций (17) является полной в пространстве $\overset{\circ}{V}{}_2^{2s}(0,l)$ и с учетом леммы 2 является также ортонормированной системой в классе Соболева $\overset{\circ}{V}{}_2^{2s}(0,l)$. Теорема 1 доказана.

Обозначим через $\mathring{F}^s(0,l)$ множество всех функций $f(x)\in H^s\,(0,l)$, удовлетворяющих граничным условиям $f^{(4k)}(0) = f^{(4k+1)}(0) = f^{(4k)}(l) = f^{(4k+1)}\,(l) = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, \left[\dfrac{s+3}{4}\right] - 1$.

Теорема 2. *Система собственных функций (17) спектральной задачи (6), (7) образует базис Рисса в пространстве Соболева* $\mathring{F}^s(0,l)$.

Доказательство. В силу теоремы 1 система собственных функций (17) самосопряженного оператора L является полной ортонормальной системой в пространстве $\mathring{F}_2^{2s}(0,l)$. Тогда, если $f(x)\in \mathring{F}^s(0,l)$, то существует последовательность функций $g_m(x)\in \mathring{V}_2^{2s}(0,l)$, такая, что имеет место сходимость

$$\|g_m(x) - f(x)\|_{H^s(0,l)} \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

где ряд $g_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(m)} X_n(x)$ сходится по норме пространства $W_2^{2s}(0,l)$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $M(\varepsilon)$, такое, что при всех $m \geqslant M(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left\|g_m(x) - f(x)\right\|_{H^s(0,l)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, для данного $\varepsilon > 0$ существует номер $N_m(\varepsilon)$, такой, что для любых $N \geqslant N_m(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\left\|g_m(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(m)} X_n(x)\right\|_{W_2^{2s}(0,l)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19}$$

Из оценки (18) с учетом (19) получим

$$\left\|g_m(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(m)} X_n(x)\right\|_{H^{2s}(0,l)} \le c_2 \left\|g_m(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(m)} X_n(x)\right\|_{W_2^{2s}(0,l)} < c_2 \frac{\varepsilon}{2}.$$

Используя вложение пространства $H^{2s}\,(0,l)$ в пространство $H^s\,(0,l)$, будем иметь

$$\left\|g_m(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(m)} X_n(x)\right\|_{H^s(0,l)} \le \left\|g_m(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(m)} X_n(x)\right\|_{H^{2s}(0,l)} < c_2 \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, используя неравенство треугольника, имеем

$$\left\|f(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n^{(m)} X_n(x)\right\|_{H^s(0,l)} \le \left\|f(x) - g_m(x)\right\|_{H^s(0,l)} +$$

$$+\left\| g_m(x)-\sum_{n=1}^{N} b_n^{(m)} X_n(x) \right\|_{H^s(0,l)} < (1+c_2)\frac{\varepsilon}{2},$$

для любой перестановки системы собственных функций (17), т. е. система собственных функций (17) образует перестановочный базис в классе $\overset{\circ}{F}{}^s(0,l)$. Это означает, что система собственных функций (17) образует базис Рисса в пространстве Соболева $\overset{\circ}{F}{}^s(0,l)$, согласно теореме И.М. Гельфанда и Е.Р. Лорча [Гохберг, Крейн 1965]. Теорема 2 доказана.

Скалярное произведение в пространстве $W_2^{s_1,s_2}((0,l)\times(0,l))$ вводится так:

$$\big(f(x,y),g(x,y)\big)_{W_2^{s_1,s_2}((0,l)\times(0,l))}=\big(f(x,y),g(x,y)\big)_{L_2((0,l)\times(0,l))}+$$

$$+\Big(D_x^{s_1}f(x,y),D_x^{s_1}g(x,y)\Big)_{L_2((0,l)\times(0,l))}+\Big(D_y^{s_2}f(x,y),D_y^{s_2}g(x,y)\Big)_{L_2((0,l)\times(0,l))}+$$

$$+\Big(D_{x,y}^{s_1,s_2}f(x,y),D_{x,y}^{s_1,s_2}g(x,y)\Big)_{L_2((0,l)\times(0,l))}. \tag{20}$$

Соответственно, норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|f(x,y)\|^2_{W_2^{s_1,s_2}((0,l)\times(0,l))}=\|f(x,y)\|^2_{L_2((0,l)\times(0,l))}+\|D_x^{s_1}f(x,y)\|^2_{L_2((0,l)\times(0,l))}+$$

$$+\|D_y^{s_2}f(x,y)\|^2_{L_2((0,l)\times(0,l))}+\|D_{x,y}^{s_1,s_2}f(x,y)\|^2_{L_2((0,l)\times(0,l))}.$$

Лемма 3. *Если* $\{\varphi_m(x)\}$ *и* $\{\psi_n(z)\}$ *– полные ортонормальные системы соответственно в* $W_2^{s_1}(0,l)$ *и* $W_2^{s_2}(0,l)$ *, то система всех произведений*

$$f_{mn}(x,z)=\varphi_m(x)\bullet\psi_n(z)$$

есть полная ортонормальная система в $W_2^{s_1,s_2}((0,l)\times(0,l))$.

Доказательство. В силу теоремы Фубини

$$\|f_{mn}(x,z)\|^2_{W_2^{s_1,s_2}((0,l)\times(0,l))}=\|\varphi_m(x)\|^2_{L_2(0,l)}\cdot\|\psi_n(z)\|^2_{L_2(0,l)}+\|D_x^{s_1}\varphi_m(x)\|^2_{L_2(0,l)}\times$$

$$\times\|\psi_n(z)\|^2_{L_2(0,l)}+\|\varphi_m(x)\|^2_{L_2(0,l)}\cdot\|D_z^{s_2}\psi_n(z)\|^2_{L_2(0,l)}+\|D_x^{s_1}\varphi_m(x)\|^2_{L_2(0,l)}\times$$

$$\times\|D_z^{s_2}\psi_n(z)\|^2_{L_2(0,l)}=\left(\|\varphi_m(x)\|^2_{L_2(0,l)}+\|D_x^{s_1}\varphi_m(x)\|^2_{L_2(0,l)}\right)\cdot\|\psi_n(z)\|^2_{L_2(0,l)}+$$

$$+\left(\|\varphi_m(x)\|^2_{L_2(0,l)}+\|D_x^{s_1}\varphi_m(x)\|^2_{L_2(0,l)}\right)\cdot\|D_z^{s_2}\psi_n(z)\|^2_{L_2(0,l)}=$$

$$=\left(\|\varphi_m(x)\|^2_{L_2(0,l)}+\|D_x^{s_1}\varphi_m(x)\|^2_{L_2(0,l)}\right)\left(\|\psi_n(z)\|^2_{L_2(0,l)}+\|D_z^{s_2}\psi_n(z)\|^2_{L_2(0,l)}\right)=1.$$

Если $m \neq m_1$ либо $n \neq n_1$, то в силу той же теоремы

$$\left(f_{mn}(x,z), f_{m_1n_1}(x,z)\right)_{W_2^{s_1,s_2}((0,l)\times(0,l))} = \left(f_{mn}(x,z), f_{m_1n_1}(x,z)\right)_{L_2((0,l)\times(0,l))} +$$

$$+\left(D_x^{s_1} f_{mn}(x,z), D_x^{s_1} f_{m_1n_1}(x,z)\right)_{L_2((0,l)\times(0,l))} + \left(D_z^{s_2} f_{mn}(x,z), D_z^{s_2} f_{m_1n_1}(x,z)\right)_{L_2((0,l)\times(0,l))} +$$

$$+\left(D_{x,z}^{s_1,s_2} f_{mn}(x,z), D_{x,z}^{s_1,s_2} f_{m_1n_1}(x,z)\right)_{L_2((0,l)\times(0,l))} = \left(\varphi_m(x), \varphi_{m_1}(x)\right)_{L_2(0,l)} \times$$

$$\times\left(\psi_n(z), \psi_{n_1}(z)\right)_{L_2(0,l)} + \left(D_x^{s_1}\varphi_m(x), D_x^{s_1}\varphi_{m_1}(x)\right)_{L_2(0,l)} \cdot \left(\psi_n(z), \psi_{n_1}(z)\right)_{L_2(0,l)} +$$

$$+\left(\varphi_m(x), \varphi_{m_1}(x)\right)_{L_2(0,l)} \cdot \left(D_z^{s_2}\psi_n(z), D_z^{s_2}\psi_{n_1}(z)\right)_{L_2(0,l)} +$$

$$+\left(D_x^{s_1}\varphi_m(x), D_x^{s_1}\varphi_{m_1}(x)\right)_{L_2(0,l)} \cdot \left(D_z^{s_2}\psi_n(z), D_z^{s_2}\psi_{n_1}(z)\right)_{L_2(0,l)} =$$

$$= \left(\left(\varphi_m(x), \varphi_{m_1}(x)\right)_{L_2(0,l)} + \left(D_x^{s_1}\varphi_m(x), D_x^{s_1}\varphi_{m_1}(x)\right)_{L_2(0,l)}\right) \times$$

$$\times\left(\psi_n(z), \psi_{n_1}(z)\right)_{L_2(0,l)} + \left(\left(\left(\varphi_m(x), \varphi_{m_1}(x)\right)_{L_2(0,l)} +\right.\right.$$

$$\left.+\left(D_x^{s_1}\varphi_m(x), D_x^{s_1}\varphi_{m_1}(x)\right)_{L_2(0,l)}\right) \cdot \left(D_z^{s_2}\psi_n(z), D_z^{s_2}\psi_{n_1}(z)\right)_{L_2(0,l)} =$$

$$= \left(\left(\varphi_m(x), \varphi_{m_1}(x)\right)_{L_2(0,l)} + \left(D_x^{s_1}\varphi_m(x), D_x^{s_1}\varphi_{m_1}(x)\right)_{L_2(0,l)}\right) \times$$

$$\times\left(\left(\psi_n(z), \psi_{n_1}(z)\right)_{L_2(0,l)} + \left(D_z^{s_2}\psi_n(z), D_z^{s_2}\psi_{n_1}(z)\right)_{L_2(0,l)}\right) = 0.$$

Поскольку скалярное произведение (20) двух переменных существует на $\prod = (0,l)\times(0,l)$, то докажем полноту системы $\{f_{mn}(x,z)\}$. Допустим, что в $W_2^{s_1,s_2}(\prod)$ существует функция $f(x,z)$ ортогональная ко всем функциям $f_{mn}(x,z)$. Положим $F_m(z) = (f(x,z), \varphi_m(x))_{W_2^{s_1}(0,l)}$. Легко видеть, что функции $F_m(z)$ принадлежат классу $W_2^{s_2}(0,l)$. Тогда имеем

$$(F_m(z), \psi_n(z))_{W_2^{s_2}(0,l)} = (f(x,z), fm_n(x,z))_{W_2^{s_1,s_2}((0,l)\times(0,l))} = 0.$$

В силу полноты системы $\psi_n(z)$ отсюда вытекает, что для почти всех z

$$F_m(z) = 0.$$

Но тогда почти для каждого z имеют место равенства

$$(f(x,z),\, \varphi_m(x))_{W_2^{s_1}(0,l)} = 0$$

для всех m. Из полноты системы $\varphi_m(x)$ следует, что при почти каждом z множество тех x, где $f(x,z) \neq 0$, имеет меру нуль. В силу теоремы Фубини это означает, что на $\prod = (0,l) \times (0,l)$ функция $f(x,z)$ равна 0 почти всюду. Лемма 3 доказана.

Скалярное произведение в пространстве $W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\prod)$ вводится так:

$$\left(f(x),g(x)\right)_{W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)} = \left(f(x),g(x)\right)_{L_2(\Pi)} +$$

$$+\sum_{j_1=1}^{N}\left(D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} f(x), D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} g(x)\right)_{L_2(\Pi)} + \sum_{1\le j_1<j_2\le N}\left(D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} f(x), D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} g(x)\right)_{L_2(\Pi)} +$$

$$+\ldots+\sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_N\le N}\left(D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} \ldots D_{x_{j_N}}^{s_{j_N}} f(x), D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} \ldots D_{x_{j_N}}^{s_{j_N}} g(x)\right)_{L_2(\Pi)}.$$

Тогда, соответственно, норма в пространстве $W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\prod)$ определяется по формуле

$$\left\|f(x)\right\|^2_{W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)} = \left\|f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)} + \sum_{j_1=1}^{N}\left\|D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)} +$$

$$+\sum_{1\le j_1<j_2\le N}\left\|D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)} + \ldots + \sum_{1\le j_1<j_2<\ldots<j_N\le N}\left\|D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} \ldots D_{x_{j_N}}^{s_{j_N}} f(x)\right\|^2_{L_2(\Pi)}.$$

Методом математической индукции и из леммы 3 получим следующее утверждение.

Лемма 4. *Если* $\{\varphi_{m_1}(x_1)\},\dots,\{\varphi_{m_N}(x_N)\}$ *– полные ортонормальные системы соответственно в пространствах* $W_2^{s_1}(0,l),\dots,W_2^{s_N}(0,l)$, *то система всех произведений*

$$f_m(x) = f_{m_1,\dots m_N}(x_1,\dots, x_N) = \varphi_{m_1}(x_1) \ldots \varphi_{m_n}(x_N)$$

есть полная ортонормальная система в $W_2^{2s_1,2s_2,\dots,2s_N}(\prod)$.

Обозначим через $\overset{\circ}{V}{}_2^{2s_1,2s_2,\dots,2s_N}(\prod)$ множество всех функций $f(x) \in W_2^{2s_1,2s_2,\dots,2s_N}(\prod)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^{4k_j} f(x)}{\partial x_j^{4k_j}}\right|_{x_j=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^{4k_j+1} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}}\right|_{x_j=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^{4k_j} f(x)}{\partial x_j^{4k_j}}\right|_{x_j=l} = 0, \quad \left.\frac{\partial^{4k_j+1} f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}}\right|_{x_j=l} = 0$$

при $k_j = \overline{0, \ \left[\dfrac{s_j+1}{2}\right]-1}, \quad j=\overline{1,\ N}$.

Применим эту лемму 4 к нашим ортонормальным системам. В пространстве $\overset{\circ}{V}{}_2^{2s_1,2s_2,\dots,2s_N}(\prod)$ функций N – переменных $f(x) = f(x_1,\dots,x_N)$ полную ортонормальную систему образуют из всех произведений

$$v_{m_1,\dots m_N}(x_1,\dots,x_N) = X_{m_1}(x_1)\dots X_{m_n}(x_N),$$

где

$$X_{m_j}(x_j) = \frac{1}{\sqrt{1+d_{m_j}^{4s_j}}}\times$$

$$\times\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{l}\left|tg\dfrac{d_{m_j}l}{2}\right|}\left(\dfrac{shd_{m_j}(x_j-\frac{l}{2})}{ch\dfrac{d_{m_j}l}{2}}-\dfrac{\sin d_{m_j}(x_j-\frac{l}{2})}{\cos\dfrac{d_{m_j}l}{2}}\right), \ m_j=2k_j,\, k_j=1,2,\dots, \\ \dfrac{1}{\sqrt{l}\left|ctg\dfrac{d_{m_j}l}{2}\right|}\left(\dfrac{chd_{m_j}(x_j-\frac{l}{2})}{sh\dfrac{d_{m_j}l}{2}}+\dfrac{\cos d_{m_j}(x_j-\frac{l}{2})}{\sin\dfrac{d_{m_j}l}{2}}\right), \ m_j=2k_j-1,\ k_j=1,2,\dots, \end{cases} \tag{21}$$

d_{mj} – корень уравнения (13).

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. *Система собственных функций*

$$\left\{v_{m_1,\dots,m_N}\left(x_1,\dots,x_N\right)\right\}_{(m_1,\dots,m_N)\in\mathbb{N}^N} = \left\{\prod_{j=1}^{N}X_{m_j}(x_j)\right\}_{(m_1,\dots,m_N)\in\mathbb{N}^N} \tag{22}$$

спектральной задачи (4), (5) является полной ортонормированной системой в классе Соболева $\overset{\circ}{V}{}_2^{2s_1,2s_2,\dots,2s_N}(\prod)$.

Обозначим через $\overset{\circ}{F}{}^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\prod)$ множество всех функций $f(x)\in H^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\prod)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^{4k_j}f(x)}{\partial x_j^{4k_j}}\right|_{x_j=0}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k_j+1}f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}}\right|_{x_j=0}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k_j}f(x)}{\partial x_j^{4k_j}}\right|_{x_j=l}=0,\ \left.\frac{\partial^{4k_j+1}f(x)}{\partial x_j^{4k_j+1}}\right|_{x_j=l}=0$$

при $k_j=\overline{0,\ \left[\dfrac{s_j+3}{4}\right]-1},\quad j=\overline{1,\ N}$.

Справедлива следующая

Теорема 4. *Система собственных функций (22) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространстве Соболева* $\mathring{F}^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\prod)$.

Доказательство. По теореме 2 система собственных функций (17) спектральной задачи (11), (12) образует базис Рисса в пространстве $\mathring{F}^s(0,l)$. Используя теоремы Н.К. Бари [Гохберг, Крейн 1965] с соответствующей заменой скалярного произведения $(f,g)_{H^s(0,l)}$ некоторым новым $(f,g)_{H^s(0,l)}$ топологически эквивалентным исходному, (т. е. существуют константы $c_3,c_4 > 0$ такие, что

$$c_3(f,f)_{H^s(0,l)},(f,f)_{H^s(0,l)}, c_4(f,f)_{H^s(0,l)},)$$

получим в пространстве $\mathring{F}^s(0,l)$ систему собственных функций (17) спектральной задачи (11), (12), являющуюся ортонормированным базисом. Аналогично теореме 3 можно утверждать, что система собственных функций (22) спектральной задачи (4), (5) является ортонормированным базисом в классе $\mathring{F}^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\prod) = \mathring{F}^{s_1}(0,l)\times \mathring{F}^{s_2}(0,l)\times \ldots\times \mathring{F}^{s_N}(0,l)$. Так как справедливы неравенства

$$c_5(f,f)_{H^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\prod)},(f,f)_{H^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\prod)}, c_6(f,f)_{H^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\prod)}, c_6\geq c_5 > 0,$$

можно утверждать, что система собственных функций (22) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространстве Соболева $\mathring{F}^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\prod)$. Теорема 4 доказана.

Следствие 1. *Если* $s_j > k + \frac{N}{2}, k \geq 0, k \in z$, *то ряд Фурье функции* $f(x)\in \mathring{F}^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\prod)\cap C^k(\prod)$ *по системе собственных функций (22) спектральной задачи (4), (5) сходится по норме пространства* $C^k(\prod)$ *к функции* $f(x)$.

Доказательство. Пусть $s_j > k + \frac{N}{2}, k \geq 0, k \in z$. Тогда по известной теореме Соболева имеет место вложение $H^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\prod)$ в $C^k(\prod)$ и справедлива оценка

$$\left\|f\left(x\right)\right\|_{C^k(\Pi)} \leq c_7\cdot\left\|f\left(x\right)\right\|_{H^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\Pi)},\ c_7 > 0. \tag{23}$$

Согласно теореме 4 любая последовательность частичных сумм $S_m(x)\in\mathring{F}^{s_1,s_2,\ldots,s_N}(\prod)$ ряда Фурье функции сходится к функции

$f(x) \in \overset{\circ}{F}^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\prod)$ по норме пространства $H^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\prod)$, т. е. имеет место предел

$$\|S_m(x) - f(x)\|_{H^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\prod)} \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Следовательно, с применением оценки (23) получаем, что для любой функции $f(x) \in \overset{\circ}{F}^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\prod) \cap C^k(\prod)$ выполняется сходимость

$$\|S_m(x) - f(x)\|_{C^k(\prod)} \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Это означает, что ряд Фурье функции $f(x) \in \overset{\circ}{F}^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\prod) \cap C^k(\prod)$ по системе собственных функций (22) спектральной задачи (4), (5) сходится по норме пространства $C^k(\prod)$ к функции $f(x)$. Следствие 1 доказано.

Существование и единственность решения начально-граничной задачи

Регулярным решением уравнения (1) в области $Q = \prod \times (0,T)$ назовем функцию $u(y,t)$ из класса $u(y,t) \in C(\bar{Q})$, $D^{\alpha}_{0t}u(y,t) \in C(Q)$,

$$\frac{\partial^{4m-3}u(y,t)}{\partial y_j^{4m-3}} \in C(\bar{Q}),\quad \frac{\partial^{4m}u(y,t)}{\partial y_j^{4m}} \in C(Q),\ j = 1,2,\dots,N$$

и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(y,t) \in Q$.

Обозначим через $\overset{\circ}{V}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N;\,\theta}$ множество всех функций $u(y,t) \in W_2^{s_1,s_2,\dots,s_N;\theta}(Q)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\left.\frac{\partial^{4k_j}u(y,t)}{\partial y_j^{4k_j}}\right|_{y_j=0} = 0,\quad \left.\frac{\partial^{4k_j+1}u(y,t)}{\partial y_j^{4k_j+1}}\right|_{y_j=0} = 0,\quad \left.\frac{\partial^{4k_j}u(y,t)}{\partial y_j^{4k_j}}\right|_{y_j=l} = 0,\quad \left.\frac{\partial^{4k_j+1}u(y,t)}{\partial y_j^{4k_j+1}}\right|_{y_j=l} = 0$$

при $k_j = 0\ \overline{\left[\frac{s_j+3}{4}\right]-1},\quad j = \overline{1,\ N}$.

Функцию $u(y,t)$ назовем регулярным решением задачи (1)–(3) в области $Q = \prod \times (0,T)$, если функция $u(y,t)$ – регулярное решение уравнения (1) в области $Q = \prod \times (0,T)$, удовлетворяющее начальным и граничным условиям (2) и (3).

Пусть функция $u(y,t)\in W_2^{s_1,s_2,\ldots,s_N;\theta}(Q)$ с показателем $s_1=s_2=\ldots=s_N=$ $=4m+\dfrac{N}{2}\ \theta=-[-\alpha]$ удовлетворяет уравнению (1) во всех точках $(y,t)\in Q$, а также начальным и граничным условиям (2) и (3). Тогда функция $u(y,t)$ является регулярным решением задачи (1)–(3) в области Q.

Введем функции

$$T_{m_1,\ldots,m_N}(t)=\int_\Pi u(y,t)\tilde{v}_{m_1,\ldots,m_N}(y)dy\ , \qquad (24)$$

где

$$\tilde{v}_{m_1,\ldots,m_N}(y)=\prod_{j=1}^{N}X_{m_j}(y_j)\ .$$

В силу (1)–(3) неизвестные функции $T_m(t)=T_{m_1,\ldots,m_N}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$D_{0t}^{\alpha\prime}T_{m_1,\ldots,m_N}(t)+\lambda_{m_1,\ldots,m_N}T_{m_1,\ldots,m_N}(t)=f_{m_1,\ldots,m_N}(t),\ p-1<\alpha\le p,\ p\in\prod \qquad (25)$$

и начальным условиям

$$\lim_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-i}T_{m_1,\ldots,m_N}(t)=\varphi_{m_1,\ldots,m_N},=i=1,2,\ldots,p,\ m_j\in\prod, \qquad (26)$$

где

$$f_{m_1,\ldots,m_N}(t)=\int_\Pi f(y,t)\tilde{v}_{m_1,\ldots,m_N}(y)dy,\quad \left(\varphi_j\right)_{m_1,\ldots,m_N}=\int_\Pi \varphi_j(y)\tilde{v}_{m_1,\ldots,m_N}(y)dy\ .$$

Решение задачи Коши (25), (26) известно ([Самко, Килбас, Маричев 1987], [Нахушев 2003], [Псху 2005]) и имеет вид

$$T_{m_1,\ldots,m_N}(t)=\sum_{j=1}^{p}\left(\varphi_j\right)_{m_1,\ldots,m_N}\cdot t^{\alpha-j}\cdot E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{m_1,\ldots,m_N}\cdot t^{\alpha}\right)+$$

$$+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\cdot E_{\alpha,\alpha}\left[\mu_{m_1,\ldots,m_N}\cdot(t-\tau)^{\alpha}\right]f_{m_1,\ldots,m_N}(\tau)d\tau, \qquad (27)$$

где

$$\mu_{m_1,\ldots,m_N}=-\lambda_{m_1,\ldots,m_N}=-a^2\sum_{j=1}^{N}\lambda_{m_j}=-a^2\sum_{j=1}^{N}d_{m_j}^{4m}\ , \qquad (28)$$

$$E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{m_1,\ldots,m_N}\cdot t^{\alpha}\right)=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(\mu_{m_1,\ldots,m_N}t^{\alpha}\right)^q}{\Gamma(\alpha q+\alpha-j+1)}\ , \qquad (29)$$

$$E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{m_1,\ldots,m_N}\cdot t^{\alpha}\right)=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(\mu_{m_1,\ldots,m_N}t^{\alpha}\right)^q}{\Gamma(\alpha q+\alpha-j+1)}\ , \qquad (30)$$

Поскольку функции (24) построены в явном виде (27), то на основании полноты системы собственных функций (22) в $L_2(\prod)$ нетрудно доказать единственность решения задачи (1)–(3). Пусть $f(y,t) = 0$ и $\varphi_i(t) = 0$, $i = \overline{1, p}$. Тогда из формул (27) и (24) следует, что $\int\limits_{\Pi} u(y,t)\tilde{v}_{m_1,\dots,m_N}(y)dy = 0$ при всех $m_1,\dots m_N \in Z$ и любом $t \in [0,T]$. Отсюда в силу полноты системы собственных функций (22) в $L_2(\prod)$ вытекает, что $u(y,t) = 0$ почти всюду в области $\prod$ при любом $t \in [0,T]$. Как известно, по теореме вложения Соболева, если функция $u(y,t)$ непрерывна на $\overline{Q}$, то $u(y,t) \equiv 0$ в $\overline{Q}$. Это доказывает единственность решения задачи (1)–(3).

При каждом $t > 0$ функция $u(y,t) \in \overset{\circ}{V}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N;\,\theta}(Q)$ по переменной y является функцией из класса $u(y,t) \in \overset{\circ}{V}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N;\,\theta}(\prod)$. Поэтому, рассматривая $t > 0$ как параметр, решение задачи (1)–(3) будем искать из класса $\overset{\circ}{V}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N;\,\theta}(Q)$ в виде суммы ряда по системе собственных функций (22) спектральной задачи (4), (5):

$$u(y,t) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} T_{m_1,\dots,m_N}(t)\cdot\tilde{v}_{m_1,\dots,m_N}(y), \tag{31}$$

где $\tilde{v}_{m_1,\dots,m_N}(y) = \prod\limits_{j=1}^{N} X_{m_j}(y_j)$, $T_{m_1,\dots,m_N}(t)$ – определяется по формуле (27).

После подстановки (27) в (31) получим единственное решение задачи (1)–(3) в виде ряда

$$u(y,t) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{p} (\varphi_j)_{m_1,\dots,m_N} \cdot t^{\alpha-j} \cdot E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{m_1,\dots,m_N} \cdot t^{\alpha}\right) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\mu_{m_1,\dots,m_N} \cdot (t-\tau)^{\alpha}\right] f_{m_1,\dots,m_N}(\tau)d\tau \right] \cdot \tilde{v}_{m_1,\dots,m_N}(y_1,\dots,y_N). \tag{32}$$

Поскольку система собственных функций (22) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространстве Соболева $\overset{\circ}{F}{}^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\prod)$, то любая функция из этого класса разлагается единственным образом в ряд Фурье, сходящийся по норме пространства $H^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\prod)$. Поэтому ряд (32) сходится в $H^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\prod)$ при любом $t \in [0,T]$. Выясним условия существования решения из класса $\overset{\circ}{V}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N;\,\theta}(Q)$. Согласно теореме 4, система собственных функций (22) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространствах Соболева $\overset{\circ}{F}{}^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)$ и $\overset{\circ}{V}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N}(Q)$. Поэтому справедливо неравенство

$$\left\|u(y,t)\right\|^2_{C^{4m,4m,\dots,4m}(\Pi)} \le c_8 \left\|u(y,t)\right\|^2_{H^{s_1,s_2,\dots,s_N}(\Pi)} \le$$

$$\le c_9 \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{p} \left(\varphi_j\right)_{m_1,\dots,m_N} \cdot t^{\alpha-j} \cdot E_{\alpha,\alpha-j+1}\left(\mu_{m_1,\dots,m_N} \cdot t^{\alpha}\right) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\mu_{m_1,\dots,m_N} \cdot (t-\tau)^{\alpha}\right] f_{m_1,\dots,m_N}(\tau)\, d\tau \right|^2 \cdot \prod_{k=1}^{N}\left(1+d_{m_k}^{2s_k}\right) < \infty. \qquad 33$$

По теореме вложения Соболева условие (33) является достаточным для существования регулярного решения задачи (1)–(3) из класса $\overset{\circ}{V}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N;\,\theta}(Q)$ с показателем $s_1 = s_2 = \dots = s_N = 4m + \frac{N}{2}$, $\theta = -[-\alpha]$.

При $0 < \alpha < 2$, с учетом оценки функции Миттаг-Леффлера [Podlubny 1999]

$$\left|E_{\alpha,\alpha-j+1}(\mu_{m_1,\dots,m_N} t^{\alpha})\right| \le \frac{C}{1+\left|\mu_{m_1,\dots,m_N} t^{\alpha}\right|},$$

$$\left|E_{\alpha,\alpha}(\mu_{m_1,\dots,m_N}(t-\tau)^{\alpha})\right| \le \frac{C}{1+\left|\mu_{m_1,\dots,m_N}(t-\tau)^{\alpha}\right|}$$

можно упростить достаточные условия (33) существования регулярного решения задачи (1)–(3) из класса $\overset{\circ}{V}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N;\,\theta}(Q)$ с показателем $s_1 = s_2 = \dots = s_N = 4m + \frac{N}{2}$; $\theta = -[-\alpha]$.

Если для любого $j = 1, 2, \dots, p$ и $0 < t \le T$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left|\left(\varphi_j\right)_{m_1,\dots,m_N}\right|^2 \cdot \prod_{k=1}^{N}\left(1+d_{m_k}^{2s_k}\right) < \infty,$$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left|\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f_{m_1,\dots,m_N}(\tau)\, d\tau\right|^2 \cdot \prod_{k=1}^{N}\left(1+d_{m_k}^{2s_k}\right) < \infty,$$

то условие (33) будет выполнено.

Справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть начальные функции $\varphi_i(y)$, $i = 1, 2, \dots, p$ и правая часть $f(y,t)$ удовлетворяет условию (33) при каждом $t > 0$. Тогда регулярное решение задачи (1)–(3) из класса* $\overset{\circ}{V}{}_2^{s_1,s_2,\dots,s_N;\,\theta}(Q)$

с показателем $s_1 = s_2 = ... = s_N = 4m + \frac{N}{2}$, $\theta = -[-\alpha]$ *существует единственно и представляется в виде ряда (32), где коэффициенты определяются по формулам (28)–(30).*

В заключение выделим случаи, когда $\alpha = 2$, $m = 1$, $N = 2, 3$, т. е. уравнения

$$u_{tt} + a^2 (u_{y_1y_1y_1y_1} + u_{y_2y_2y_2y_2}) = f(y_1,y_2,t),$$
$$u_{tt} + a^2 (u_{y_1y_1y_1y_1} + u_{y_2y_2y_2y_2} + u_{y_3y_3y_3y_3}) = f(y_1,y_2, y_2,t).$$

Если $\alpha = 2$, $m = 1$, $N = 2$, то решение (32) имеет вид:

$$u(y_1,y_2,t) = \sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\left[\left(\varphi_1\right)_{m_1,m_2}\cdot\frac{\sin a\sqrt{d_{m_1}^4+d_{m_2}^4}\,t}{a\sqrt{d_{m_1}^4+d_{m_2}^4}}+\left(\varphi_2\right)_{m_1,m_2}\cdot\cos a\sqrt{d_{m_1}^4+d_{m_2}^4}\,t+\right.$$
$$\left.+\int_0^t\frac{\sin a\sqrt{d_{m_1}^4+d_{m_2}^4}\left(t-\tau\right)}{a\sqrt{d_{m_1}^4+d_{m_2}^4}}f_{m_1,m_2}\left(\tau\right)d\tau\right]\cdot\tilde{v}_{m_1,m_2}(y_1,y_2),$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$\varphi_1(y_1,y_2)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\left(\varphi_1\right)_{m_1,m_2}\tilde{v}_{m_1,m_2}(y_1,y_2),\quad \varphi_2(y_1,y_2)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\left(\varphi_2\right)_{m_1,m_2}\tilde{v}_{m_1,m_2}(y_1,y_2)$$
,

$$\left(\varphi_1\right)_{m_1,m_2}=(\varphi_1(y_1,y_2),\tilde{v}_{m_1,m_2}(y_1,y_2)),\quad \left(\varphi_2\right)_{m_1,m_2}=(\varphi_2(y_1,y_2),\tilde{v}_{m_1,m_2}(y_1,y_2)),$$

$$f_{m_1,m_2}\left(t\right)=\left(f\left(y_1,y_2,t\right),\tilde{v}_{m_1,m_2}(y_1,y_2)\right),\quad \tilde{v}_{m_1,m_2}\left(y_1,y_2\right)=\prod_{j=1}^{2}X_{m_j}(y_j).$$

Когда $\alpha = 2$, $m = 1$, $N = 3$, то решение задачи (1)–(3) на основании (32) определяется по формуле

$$u(y_1,y_2,y_3,t)=\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\sum_{m_3=1}^{\infty}\left[\left(\varphi_1\right)_{m_1,m_2,m_3}\frac{\sin a\sqrt{d_{m_1}^4+d_{m_2}^4+d_{m_3}^4}\,t}{a\sqrt{d_{m_1}^4+d_{m_2}^4+d_{m_3}^4}}+\right.$$
$$+\left(\varphi_2\right)_{m_1,m_2,m_3}\cdot\cos a\sqrt{d_{m_1}^4+d_{m_2}^4+d_{m_3}^4}\,t+$$
$$\left.+\int_0^t\frac{\sin a\sqrt{d_{m_1}^4+d_{m_2}^4+d_{m_3}^4}\left(t-\tau\right)}{a\sqrt{d_{m_1}^4+d_{m_2}^4+d_{m_3}^4}}f_{m_1,m_2,m_3}\left(\tau\right)d\tau\right]\cdot\tilde{v}_{m_1,m_2,m_2}(y_1,y_2,y_3),$$

где коэффициенты определяются по формулам

$$\varphi_1(y_1,y_2,y_3)=\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\sum_{m_3=1}^{\infty}(\varphi_1)_{m_1,m_2,m_3}\tilde{v}_{m_1,m_2,m_3}(y_1,y_2,y_3),$$

$$\varphi_2(y_1,y_2,y_3)=\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\sum_{m_3=1}^{\infty}(\varphi_2)_{m_1,m_2,m_3}\tilde{v}_{m_1,m_2,m_3}(y_1,y_2,y_3),$$

$$(\varphi_1)_{m_1,m_2,m_3}=(\varphi_1(y_1,y_2,y_3),\tilde{v}_{m_1,m_2,m_3}(y_1,y_2,y_3)),$$

$$(\varphi_2)_{m_1,m_2,m_3}=(\varphi_2(y_1,y_2,y_3),\tilde{v}_{m_1,m_2,m_3}(y_1,y_2,y_3)),$$

$$f_{m_1,m_2,m_3}(t)=\left(f\left(y_1,y_2,y_3,t\right),\ \tilde{v}_{m_1,m_2,m_3}(y_1,y_2,y_3)\right),$$

$$\tilde{v}_{m_1,m_2,m_3}\left(y_1,y_2,y_3\right)=\prod_{j=1}^{3}X_{m_j}(y_j).$$

Работа выполнена в соответствии с планом исследований НУУз имени Мирзо Улугбека (тема ОТ–Ф–4–(36 + 32).

The work was carried out in accordance with the research plan of the Mirzo Ulugbek NUUz (topic OT-F-4- (36 + 32).

Литература

Будак, Самарский, Тихонов 1980 – *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980. 688 с.

Гохберг, Крейн 1965 – *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 448 с.

Гулд 1970 – *Гулд С.* Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна. М.: Мир, 1970. 328 с.

Касимов, Атаев, Мадрахимов 2016 – *Касимов Ш.Г., Атаев Ш.К., Мадрахимов У.С.* О разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с операторами Штурма-Лиувилля с нелокальными краевыми условиями // Узбекский математический журнал. 2016. № 2. С. 158–169.

Коллатц 1968 – *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М.: Наука, 1968. 504 с.

Коренев 1965 – *Коренев Б.Г.* Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М.: Наука, 1965. 355 с.

Крылов 2012 – *Крылов А.Н.* Вибрация судов. М.: Наука, 2012. 216 с.

Наймарк 1969 – *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

Нахушев 2003 – *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применения. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Псху 2005 – *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 200 с.

Сабитов 2015 – *Сабитов К.Б.* Колебания балки с заделанными концами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2015. Т. 19. № 2. С. 311–324.

Сабитов 2017a – *Сабитов К.Б.* К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 1. С. 89–100.

Сабитов 2017b – *Сабитов К.Б.* Начальная задача для уравнения колебаний балки // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 5. С. 665–671.

Самко, Килбас, Маричев 1987 – *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

Стретт 1955 – *Стретт Дж.В. (лорд Рэлей)* Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 504 с.

Тимошенко, Янг, Уивер 1985 – *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

Тихонов, Самарский 1977 – *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

Kasimov, Ataev 2018 – *Kasimov Sh.G., Ataev Sh.K.* On solvability of the mixed problem for a partial equation of a fractional order with Laplace operators and nonlocal boundary conditions in the Sobolev classes // Uzbek Mathematical Journal. 2018. No 1. P. 73–89.

Podlubny 1999 – *Podlubny I.* Fractional Differential Equations: An Introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. San Diego, CA: Academic Press, 1999.

References

Budak, B.M., Samarskii, A.A. and Tikhonov, A.N. (1980), *Sbornik zadach po matematicheskoi fizike* [Collection of problems in mathematical physics], Nauka, Moscow, Russia.

Collatz, L. (1968), *Zadachi na sobstvennye znacheniya s tekhnicheskimi prilozheniyami* [Eigenvalue problems with technical applications], Nauka, Moscow, Russia.

Gokhberg, I.Ts. and Crane, M.G. (1965), *Vvedenie v teoriyu lineinyh nesamosopryazhennyh operatorov* [Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators], Nauka, Moscow, USSR.

Gould, S. (1970), *Variazionnye metody v zadachah o sobstvennyh znacheniyah; Vvedenie v metod promezhutochnyh zadach Vainshteina* [Variational methods in eigenvalue problems: Introduction to the Weinstein method of intermediate problems], Mir, Moscow, Russia.

Kasimov, Sh.G. and Ataev, Sh.K. (2018), “On solvability of the mixed problem for a partial equation of a fractional order with Laplace operators and nonlocal boundary conditions in the Sobolev classes”, *Uzbek Mathematical Journal,* no. 1, pp. 73–89.

Kasimov, Sh.G., Ataev, Sh.K. and Madrahimov, U.S. (2016), “On the solvability of a mixed problem for a fractional order partial differential equation with Sturm-Liouville operators with nonlocal boundary conditions”, *Uzbek Mathematical Journal,* no. 2, pp. 158–169.

Korenev, B.G. (1965), *Voprosy rascheta balok i plit na uprugom osnovanii* [Problems of calculation for beams and plates on an elastic base], Nauka, Moscow, Russia.

Krylov, A.N. (2012) *Vibracia sudov* [Vibration of ships], Nauka, Moscow, Russia.

Naimark, M.A. (1969), *Lineinye differencial’nye operatory* [Linear differential operators], Nauka, Moscow, Russia.

Nakhushev, A.M. (2003), *Drobnoye ischislenie i ego primeneniya* [Fractional calculus and its application]. Fizmatlit, Moscow, Russia.

Podlubny, I. (1999), *Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications,* Academic Press, San Diego, CA.

Pskhu, A.V. (2005), *Uravneniya v chastnyh proizvodnyh drobnogo poryadka* [Partial Linear differential equations], Nauka, Moscow, Russia.

Sabitov, K.B. (2015), “Fluctuations of the beam with sealed ends”, *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnichrskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskikh nauk,* vol. 19, no. 2, pp. 311–324.

Sabitov, K.B. (2017a), “On the theory of initial boundary-value problems for the equation of rods and beams”, *Differential equations,* vol. 53, no. 1, pp. 89–100.

Sabitov, K.B. (2017b), “The initial problem for the equation of oscillation of the beams”, *Differential equations,* vol. 53, no. 5, pp. 665–671.

Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. (1987), *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya* [Fractional-order integrals and derivatives and some of their applications], Nauka i tekhnika, Minsk, USSR.

Strutt, J., Lord Rayleigh (1955), *Teoria zvuka* [Theory of sound], V. 1, Gostekhizdat, Moscow, USSR.

Tikhonov, A.N. and Samarsky, A.A. (1977), *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics], Nauka, Moscow, Russia.

Timoshenko, S.P., Young, D. Kh. and Weaver, U. (1985), *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Oscillations in engineering], Mashinostroenie, Moscow, Russia.

Информация об авторах

Камиль Б. Сабитов, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН Республики Башкортостан, Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований Республики Башкортостан, Стерлитамак, Республика Башкортостан, Россия; 453103, Россия, Республика Башкортостан, Стерлитамак, ул. Одесская, д. 68;

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Республика Башкортостан, Россия; 453103, Россия, Республика Башкортостан, Стерлитамак, пр-т Ленина, д. 49; sabitov_fmf@mail.ru

Шакирбай Г. Касимов, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Республика Узбекистан; 100174, Республика Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская, д. 4;

Ташкентский филиал НИЯУ МИФИ, Ташкент, Республика Узбекистан; 100174, Республика Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская, д. 4; shokiraka@mail.ru

Умрбек С. Мадрахимов, аспирант, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Республика Узбекистан; 100174, Республика Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская, д. 4; umadraximov@mail.ru

Information about the authors

Kamil B. Sabitov, Dr. of Sci. (Mathematics), professor, corresponding member of the Bashkortostan Academy of Sciences, Sterlitamak branch of the Institute for Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan;

Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak, bld. 68, Odesskaya Str., Sterlitamak, Bashkortostan, Russia, 453103; sabitov_fmf@mail.ru

Shakirbai G. Kasimov, Dr. of Sci. (Mathematics), professor, National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, bld. 4, University Str., Tashkent, Uzbekistan, 100174;

Tashkent branch of NRNU MEPhI, bld. 4, University Str., Tashkent, Uzbekistan, 100174; shokiraka@mail.ru

Umrbek S. Madrahimov, doctoral student, National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, bld. 4, University Str., Tashkent, Uzbekistan, 100174; umadraximov@mail.ru

УДК 512.62
DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-102-121

Об алгебраической эквивалентности рядов Тейлора–Маклорена и «универсального ряда» И. Бернулли

Валерий М. Максимов
Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия, Российский университет дружбы народов, Москва, Россия, VM_MAXIMOV@mail.ru

Аннотация. Впервые вопрос об эквивалентности рядов И. Бернулли и Тейлора рассматривался в 1716 г. после известной публикации Тейлора в 1715 г., и их эквивалентность уже тогда не вызывала сомнений. Подробное исследование о ряде И. Бернулли опубликовал Н.Я. Сонин в 1897 г. Важной в его работе является постановка вопроса об истоках формулы Тейлора. Н.Я. Сонин считал, что это ряд И. Бернулли, а Бертран, что это бином Ньютона.

В работе предлагается искать ответ на этот вопрос в алгебре $A_F(P_s)$ – алгебре всех линейных отображений пространства полиномов от s формальных образующих над произвольном полем F характеристики ноль в себя. Элементы этой алгебры представляются некоммутативными рядами по степеням операторов дифференцирования с полиномиальными коэффициентами от операторов умножения на переменную над полем F. Тогда ряды И. Бернулли, Тейлора, Маклорена и другие эквивалентны, и их можно интерпретировать как алгебраические равенства в $A_F(P_s)$.

Ключевые слова: ряд И. Бернулли, ряд Тейлора, ряд Маклорена, линейные отображения, дифференциальные операторы, оператор умножения, полиномы от операторов умножения, поле многочленов F, характеристики ноль

Для цитирования: Максимов В.М. Об алгебраической эквивалентности рядов Тейлора–Маклорена и «универсального ряда» И. Бернулли // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2020. № 1. С. 102–121. DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-102-121

On the algebraic equivalence of Taylor–Maclaurin series and the J. Bernoulli “universal series”

Valery V. Maximov
Russian State University for the Humanities, Moscow,
Russia Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, Russia,
VM_MAXIMOV@mail.ru

Abstract. At first the issue of the equivalence between the Taylor series and the J. Bernoulli «series universalissima» was discussed in 1716 after the well-known publication of Taylor in 1715, and their equivalence was not in doubt even then. A detailed study of I. Bernoulli series N.Ya. Sonin published in 1897. An important part of his work is the issue formulation of the origins of the Taylor formula. N.Ya. Sonin believed that it was J. Bernoulli’s series, and Bertrand was of an opinion that it was Newton’s binomial.

The paper proposes to search for the answer to that question in the algebra $A_F(P_s)$, the algebra of all linear mappings of the space of polynomials in S formal generators over an arbitrary field F of characteristic zero into itself. Elements of that algebra are represented by non-commutative series in powers of differentiation operators with polynomial coefficients of the operators of multiplication by a variable over the field F. Then the series of J. Bernoulli, Taylor, Maclaurin and others are equivalent and can be interpreted as algebraic equalities in $A_F(P_s)$.

Keywords: J. Bernoulli series, Taylor series, Maclaurin series, lineal mappings, differential operators, multiplication operator, polynomials from multiplication operators, polynomial field *F* of zero characteristic

For citation: Maximov, V.M. (2020), “On the algebraic equivalence of Taylor–Maclaurin series and the J. Bernoulli ‘universal series’ ”, *RSUH/RGGU Bulletin. “Information Science. Information security. Mathematics” Series,* no. 1. pp. 102–121, DOI: 10.28995/2686-679X-2020-1-102-121

Введение

В работе [Сонин 1897] акад. Н.Я. Сонин подробно исследует вопрос о роли «универсального ряда» (series universalissima) И. Бернулли в анализе спустя 200 лет со дня его опубликования в 1694 г. В основном исследуются связи ряда И. Бернулли и его обобщений с рядами Тейлора и Маклорена. данные Тейлором в 1715 г. и самим И. Бернулли (получено в 1695 г., но опубликовано в 1722 г.).

Между тем уже в анонимной рецензии 1716 г. на работу Тейлора 1715 г. было ясно указано, что ряд Тейлора следует из ряда И. Бернулли.

И вот спустя 200 лет Н.Я. Сонин начинает свое исследование [Сонин 1897] словами: «Ряд Ивана Бернулли редко упоминается в трактатах по анализу и до сего времени не получил правильной оценки в истории математики». Действительно, и в наше время в фундаментальных университетских учебниках по анализу ряд И. Бернулли вообще не упоминается. Возможно, это следует из очевидной эквивалентности таких рядов, появившейся в результате упомянутой работы Н.Я. Сонина. С другой стороны, это может быть связано с отсутствием ясной математической структуры, в которой такая эквивалентность могла бы быть установлена.

В связи с этим в настоящей работе для корректного решения вопроса об эквивалентности указанных рядов предлагается рассмотреть алгебру в $A_F(P_s)$ всех линейных отображений пространства полиномов P_s от s переменных над произвольным полем F характеристики нуль [Максимов 2019]. При этом каждому из рядов однозначно сопоставляется операторное равенство в алгебре $A_F(P_s)$, содержащую некоммутативные ряды известных операторов из $A_F(P_s)$.

«Универсальный ряд» И. Бернулли был представлен в виде

$$\int n\,dz = zn - \frac{1}{2!}z^2\frac{dn}{dz} + \frac{1}{3!}z^3\frac{d^2n}{dz^2} + \cdots$$

В современных представлениях z – это переменное x, n – это $f(x)$ – функция от x, $\int n\ dz$ – это $\int_0^x f(t)dt = F(x) - F(0)$, где $F(x)$ первообразная от $f(x)$ – функция x. Поэтому ряд И. Бернулли принимает вид

$$F(x) - F(0) = xF'(x) - \frac{1}{2!}x^2F''(x) + \cdots$$

После очевидных преобразований получаем ряд

$$F(0) = F(x) - \frac{1}{1!}xF'(x) + \frac{1}{2!}x^2F''(x) - \frac{1}{3!}x^3F'''(x) + \cdots \tag{1}$$

Бертран в своем трактате по дифференциальному исчислению 1864 г. ошибочно называет ряд (1) рядом Якова Бернулли. Выводя это из формулы Тейлора, Бертран пишет, что этот ряд «очень отличается по форме от ряда Тейлора и, вообще говоря, менее полезен, нежели последний». Это мнение и стало расхожим в отношении ряда И. Бернулли. Поскольку ряд (1) и ряд И. Бернулли в первичной форме эквивалентны в точно определенном ниже смысле, то под «series universalissima» И. Бернулли мы будем понимать ряд (1).

Ряду (1) можно сопоставить операторное разложение линейного функционала $V_0 \in A_F(P_s)$ в виде

$$V_0 = \mathbb{1} - \frac{1}{1!}XD + \frac{1}{2!}X^2D^2 - \cdots, \tag{2}$$

где V_0 – функционал значения в нуле, $V_0 f(x) = f(0)$, $\forall f(x) \in P_1$, D – оператор дифференцирования, $Dx^n = nx^{n-1}$, X – оператор умножения на переменную x, $Xf(x) = xf(x)$, 1 – тождественное отображение пространства P_1 в себя.

Ряд Тейлора обычно записывают в виде:

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}(x-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \cdots, \tag{3}$$

которому можно сопоставить разложение тождественного оператора

$$1 = V_a + \frac{1}{1!}(x-a)V_0 D + \frac{1}{2!}(x-a)^2 V_a D^2 + \cdots,$$

где V_a – функционал значения в точке α, $V_a f(x) = f(\alpha)$, $\forall f(x) \in P_1$.

Константа α в формуле $(x-\alpha)^n$ рассматривается как оператор умножения на константу α полиномов из P_1. При $a = 0$ ряд (3) обычно называется рядом Маклорена, и ему соответствует операторное равенство

$$1 = V_0 + \frac{1}{1!}XV_0 D + \frac{1}{2!}X^2 V_a D^2 + \cdots, \tag{5}$$

Ряд Тейлора (3) можно рассматривать и в несколько ином виде

$$f(x+a) = f(a) + \frac{1}{1!}xf'(a) + \frac{1}{2!}x^2 f''(a) + \cdots, \tag{6}$$

которому соответствует операторный ряд

$$E^a = V_0 + \frac{1}{1!}XV_a D + \frac{1}{2!}X^2 V_a D^2 + \cdots, \tag{7}$$

где E^α – обозначает оператор сдвига на переменную x, $E^\alpha f(x) =$ $= f(x+\alpha)$.

Тогда эквивалентность рядов И. Бернулли, Тейлора и Маклорена понимается в том смысле, что из любого равенства (2), (4), (5) и (7) алгебраическими операциями в алгебре $A_F(P_1)$ выводятся любые остальные равенства.

Необходимо подчеркнуть, что полученные результаты справедливы для любых $s = 1, 2, \ldots$ и любого поля F характеристики нуль, в частности, поля действительных чисел, комплексных чисел и поля p-адических чисел.

Предварительные замечания

Напомним содержание теоремы 1 из [Максимов 2019]. По аналогии с операторами X и D, введенными относительно одной переменной, введем операторы $x_1,\dots,x_s$, $D_1,\dots,D_s$ относительно переменных x_1, $x_2\dots,x_s$, соответвенно. Тогда теорема 1 утверждает, что каждый элемент T алгебры $A_F(P_s)$, т. е. любое линейное отображение пространства полиномов P_s над полем F в P_s, однозначно представляется рядом

$$T = P_0(x_1,\dots,x_s) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v_1+\dots+v_s=n} P_{v_1+\dots+v_s}(x_1,\dots,x_s)D_1^{v_1}\dots D_s^{v_s}, \quad (8)$$

где $P_0(x_1,\dots,x_s)$, $P_k(x_1,\dots,x_s)$ – однозначно определенные полиномы от операторов $x_1,\dots,x_s$ над полем F. Обратно, каждому ряду типа (8) соответствует оператор из $A_F(P_s)$. Ряд (8) определяет оператор, действующий на полиномах $f(x_1,\dots,x_s)\in P_s$ по правилу

$$Tf(x_1,\dots,x_s) = P_0(x_1,\dots,x_s), f(x_1,\dots,x_s)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v_1+\dots+v_s=n} P_{v_1+\dots+v_s}(x_1,\dots,x_s)\frac{\partial^n f(x_1,\dots,x_s)}{\partial^{v_1}x_1\dots\partial^{v_s}x_s}. \quad (9)$$

Очевидно, сумма в (9) всегда конечна, так как $f(x_1,\dots,x_s)$ полином. Поэтому $\frac{\delta^n f(x_1,\dots,x_s)}{\delta^{v_1}x_1\dots\delta^{v_s}x_s} = 0$, если $n > \deg f(x_1,\dots,x_s)$.

Важность рассмотрения некоммутативных рядов (8) в том, что они образуют кольцевую структуру относительно естественного сложения и умножения, которое производится перемножением всех членов сомножителей, проведением алгебраических преобразований результата умножений согласно соотношениям Вейля, $D_iX_i^n = x_i^nD_i + nx_i^{n-1}$, $i = \overline{1,s}$ и последующим приведением подобных членов. При этом перемножение таких рядов дает ряд, соответствующий оператору, который равен произведению операторов, соответствующих перемножаемым рядам.

Другими словами, можно сказать, что равенство (8) задает кольцевой изоморфизм между элементами алгебры $A_F(P_s)$ и кольцом рядов вида (8). Это обстоятельство позволяет иногда находить разложение в ряд произведения операторов по их разложениям.

В [Максимов 2019] были рассмотрены и более общие принципы разложений операторов из алгебры $A_F(P_s)$.

Нам понадобятся и чисто дифференциальные операторы из алгебры $A_F(P_s)$, представимые в виде

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v_1+\dots+v_{s=n}} c_{v_1+\dots+v_s} D_1^{v_1} \dots D_s^{v_s},. \qquad 10)$$

где c_0, $c_{v_1+\dots+v_s}$ – константы, т. е. элементы поля F. Характеризация таких операторов дана в [Максимов 2019], а в одномерном случае в [Rota, Doubilet 1975]. Глубокая связь алгебры дифференциальных операторов была замечена давно, начиная еще с трудов символистов. В XX веке начались систематические исследования таких связей, особенно с теорией специальных полиномов, комбинаторикой и другими областями анализа и его приложений (например, [Rota, Doubilet 1975], [Висков 1975], [Висков 1993], [Висков 1996]).

Оператор сдвига E^α, представленный разложением (7), в действительности является дифференциальным оператором.

Действительно, в разложении (6) переменные x и α перестановочны. Поэтому (6) можно переписать в виде

$$f(x+a) = f(x) + \frac{1}{1!} a f'(x) + \frac{1}{2!} a^2 f''(a) + \cdots . \qquad (11)$$

Следовательно, операторное соответствие дает

$$E^a = \mathbb{1} + \frac{1}{1!} aD + \frac{1}{2!} a^2 D^2 + \cdots \stackrel{\text{def}}{=} \exp(aD) = e^{aD}.$$

«Универсальный ряд» И. Бернулли

Ряд (1) дает алгоритм вычисления значения функции f в нуле по ее значениям $f(x)$ в x из области сходимости ряда. Так как $f(0) = F(x-x)$, то (1) есть ряд Тейлора для разложения $f(x)$ в точке $\alpha = -x$. Класс функций, для которых ряд (1) сходится достаточно быстро и их описание суть как раз задачи анализа. Интересно, что каждый класс функций, для которых ряд (1) сходится, содержит множество всех полиномов.

С другой стороны, именно на полиномах теорема 1 [Максимов 2019] дает алгоритмическое представление любого оператора из

$A_F(P_s)$ в виде ряда (8). Поэтому, в частности, оператор V_0, как функционал значения в нуле, можно представить в одномерном случае в виде ряда

$$V_0 = P_0(x) + \frac{1}{1!}P_1(x)D + \frac{1}{2!}P_2(x)D^2 + \cdots,$$

где $P_i(x)$ полиномы от оператора X над полем F характеристики ноль. Нахождение полиномов $P_i(X)$ вообще не требует привлечения методов анализа уже хотя бы потому, что мы находимся над произвольным полем характеристики ноль. Для этого используется специфика оператора V_0 и оператора дифференцирования D. Рассмотрим функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\lambda^n$ обозначаемый $e^{\lambda x}$. Тогда, очевидно, $De^{\lambda x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}Dx^n - \lambda^n e^{\lambda x}$ и поэтому $D^k e^{\lambda x} = \lambda^k e^{\lambda x}$. Следовательно, имеем

$$V_0 e^{\lambda \mathrm{x}} = e^0 = 1 = e^{\lambda}(P_0(x) + \frac{1}{1!}P_1(x)\lambda + \frac{1}{2!}P_2(x)\lambda^2 + \cdots,$$

откуда

$$e^{\lambda \mathrm{x}} = P_0(x) + \frac{1}{1!}P_1(x)\lambda + \frac{1}{2!}P_2(x)\lambda^2 + \cdots = 1 + \lambda x + \frac{1}{2!}\lambda^2 x.$$

Таким образом, получаем

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = -x,\ P_2(x) = x^2, \dots,\ P_k(x) = (-x)^k, \dots$$

Поэтому имеем $P_i(x) = (-x)^i = (-1)^i x^i$, и, следовательно, полученный ряд для V_0 совпадает с рядом (2).

Определим оператор V_0 на пространстве полиномов P_s равенством $V_0 f(x_1,\dots,x_s) = f(0,\dots,0)$. Определим также операторы V_{0k}, $k = \overline{1, s}$, полагая

$$V_{0k} f(x_1,\dots,x_s) = f(x_1,\dots,x_{k-1}, 0, x_{k+1},\dots,x_s). \tag{13}$$

Очевидно, разложение (8) для оператора V_{0k} имеет вид, аналогичный ряду (2), а именно

$$V_{0k} = \mathbb{1} - \frac{1}{1!}X_k D_k + \frac{1}{2!}X_k^2 D_k^2 - \cdots = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}X_k^m D_k^m. \tag{14}$$

Теорема 1. Разложение в ряд (8) оператора V_0 в многомерном случае имеет вид

$$V_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{v_1+\dots+v_s=m} \frac{(-1)^{v_1+\dots+v_s}}{v_1!\dots v_s!} X_1^{v_1} \dots X_s^{v_s} D_1^{v_1} \dots D_s^{v_s}, \tag{15}$$

т. е. ряд (15) есть многомерный аналог «универсального ряда» И. Бернулли (2).

Доказательство. Разложение (15) следует из очевидного равенства $V_0 = V_{01} \dots V_{0s}$ и разложения (14).

Введем оператор интегрирования Y в пространстве полиномов P_1, полагая $Yf(x) = \int_0^x f(t)dt$. Легко проверяются следующие формулы:

$$DY = 1,\ YD = 1 - V_0,\ YX - XY = -Y^2.$$

Тогда первичной форме ряда И. Бернулли в наших обозначениях будет соответствовать ряд

$$Y = X - \frac{1}{2!}X^2D + \frac{1}{3!}X^3D^2 - \cdots, \tag{16}$$

Теорема 2. Разложения (2) и (16) эквивалентны.

Доказательство. Выше показано, что ряд (2) есть следствие первичного ряда И. Бернулли. Поэтому будем рассматривать чисто алгебраическое доказательство эквивалентности (2) и (16).

Покажем, что из (16) следует (2). Для этого (16) справа умножим на D. Тогда имеем

$$YD = \mathbb{1} - V_0 = XD - \frac{1}{2!}X^2D^2 + \frac{1}{3!}X^3D^3 - \cdots,$$

откуда, очевидно, следует ряд (2). Обратно, ряд (2) можно переписать в виде

$$YD = \mathbb{1} - V_0 = XD - \frac{1}{2!}X^2D^2 + \frac{1}{3!}X^3D^3 - \cdots$$

Умножая обе части справа и учитывая, что $DY = 1$, получим (2).

Об одном обобщении ряда И. Бернулли

Напомним несколько соотношений между операторами E^α, V_0, V_α и X. Далее, E^α является дифференциальным оператором, имеющим внутренние $e^{\alpha D}$, см. (12).

Поэтому имеем: $E^{\alpha_1}e^{\alpha_2} = E^{\alpha_1+\alpha_2}$ и $E^{\alpha}D = DE^{\alpha}$. Кроме того, имеют место равенства:

1) $e^{\alpha}x = (x + \alpha)e^{\alpha D}$; 2) $e^{\alpha D}(x - \alpha)^{-\alpha D} = x$; 3) $e^{-\alpha D}xe^{\alpha D} = (x - \alpha)$;

4) $V_0 = e^{\alpha}V_{\alpha}e^{-\alpha D}$; 5) $V_{\alpha} = V_0e^{\alpha D}$; 6) $e^{\alpha D}V_0 = V_0$.

Достаточно доказать равенства 1) и 5), так как остальные являются их следствиями. Эти равенства достаточно проверить на полиномах x^n. В случае 1) имеем $e^{\alpha D}xx^n = e^{\alpha D}x^{n+1} = (x + \alpha)^{n+1} = (x + \alpha)\, e^{\alpha D}x^n = (x + \alpha)(x + \alpha)^n = (x + \alpha)^{n+1}$. Аналогично в случае 5) имеем $V_{\alpha}x^n = \alpha^n = V_0e^{\alpha D}x^n = V_0(x + \alpha)^n = \alpha^n$. Тогда имеет место расширенный вариант «универсального ряда» И. Бернулли.

Теорема 3. Имеет место равенство, эквивалентное ряду (2).

$$V_a = \mathbb{1} - \frac{1}{1!}(x-a)D + \frac{1}{2!}(x-a)^2D^2 - \cdots$$

Доказательство. Умножим равенство (2) слева на $e^{-\alpha D}V_0e^{\alpha D} = V_{\alpha}$ согласно формулам 5) и 6). С правой стороны имеем

$$e^{-\alpha D}V_0e^{\alpha D} = e^{-\alpha D}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-x)^nD^n\right)e^{\alpha D} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}e^{-\alpha D}x^nD^ne^{\alpha D} \quad . \quad (18)$$

Так как

$$e^{-\alpha D}x^nD^ne^{\alpha D} = (e^{-\alpha D}xe^{\alpha D})^nD^n = (x - \alpha)^nD^n$$

в силу формулы 3) и перестановочности $e^{\alpha D}$ и D, то равенство (18) превращается в (17). Умножая ряд (17) слева на $e^{\alpha D}$, а справа на $e^{-\alpha D}$, аналогично получим ряд (2).

Действуя обеими частями ряда (17) на полином $f(x)$, получим

$$f(a) = f(x) - \frac{1}{1!}(x-a)f'(x) + \frac{1}{2!}(x-a)^2f''(x) + \cdots,$$

который также легко получить, рассмотрев разложение Тейлора $f(\alpha x + x)$, в тоже x.

Можно получить интегральный вариант расширенного ряда И. Бернулли, который не был упомянут в историческом обзоре [Сонин 1897]. Для этого вместо оператора интегрирования Y введем оператор интегрирования Y_{α}, где $Y_{\alpha}f(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$. Очевидно, что выполняются следующие равенства, аналогичные для пары Y и D,

$$DY_{\alpha} = 1, \quad Y_{\alpha}D = 1 - V_0.$$

Тогда верна

Теорема 4. Имеет место расширенный первичный «универсальный ряд» И. Бернулли.

$$Y_{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{1!}(x-a) - \frac{1}{2!}(x-a)^2 D + \frac{1}{3!}(x-a)^3 D^2 - \cdots \qquad (20)$$

При этом ряды (16) и (20) эквивалентны.

Доказательство. В равенстве (17) операторы V_α перенесем в правую часть. Тогда, заменяя $1 - V_\alpha$ на $V_\alpha D$, получим

$$0 = Y_a D - \frac{1}{1!}(x-a)D - \frac{1}{2!}(x-a)^2 D^2 - \cdots$$

Умножая этот ряд справа на Y и заменяя DY на 1, получаем (20). Покажем, что из (20) следует ряд (16). Для этого умножим (20) слева на $e^{\alpha D}$, а справа на $e^{-\alpha D}$. Тогда все члены правой части (20) перейдут в правую часть (16). На основании тех же соображений, что и при доказательстве теоремы 3, в левой части будем иметь оператор $e^{\alpha D} Y e^{-\alpha D}$, который, как легко понять, равен Y. Действительно, если $e^{\alpha D} Y e^{-\alpha D} = Y$, то это равенство эквивалентно $e^{\alpha D} Y = Y e^{-\alpha D}$, которое очевидно. Если умножить слева обе части на D, то получим $D e^{\alpha D} Y = e^{-\alpha D} DY = e^{-D}$, $D e^{\alpha D} Y = e^{\alpha D}$, так как $DY\alpha = DY = 1$. При умножении справа на D приходим к равенству $e^{\alpha D} V_0 = V_0 e^{\alpha D} = V_\alpha$, совпадающее с 5).

В многомерном случае «Универсальный ряд» И. Бернулли первичной интегральной формы не встречается и в [Сонин 1897] не упоминается. Причина этого ясна, так как зависит от понятия неопределенного интеграла в многомерном случае. Рассмотрим простейший пример такого обобщения, которое сохраняет форму ряда И. Бернулли в многомерном случае, по аналогии многомерного случая для операнда V_0.

Определим на пространстве полиномов P_s (от s переменных $x_1, \ldots, x_s$) операторы $Y_1, Y_2 \ldots, Y_s$, где Y_k есть оператор интегрирования Y по переменной x_k, при этом остальные переменные останутся неизменными, как константы. Тогда очевидно, все $Y_1, Y_2 \ldots, Y_s$ перестановочны между собой, и каждый Y_k допускает разложение в ряд И. Бернулли (16) относительно операторов X_k и D_k. То есть имеет место равенство

$$Y_k = X_k - \frac{1}{2!} X_k^2 D_k + \frac{1}{3!} X_k^3 D_k^2 - \cdots \qquad (21)$$

Если теперь в качестве операнда интегрирования на P_s принять операторы Y_1, $Y_2 \dots, Y_s$, который снова обозначим через Y, то получаем многомерный ряд И. Бернулли, из которого, очевидно, следует разложение многомерного оператора V_0 в виде (15). Это позволяет считать, что представление $Y = Y_1, Y_2 \dots, Y_s$, где Y_k имена представления (21), есть многомерный аналог первичной интегральной формы «Универсального ряда» И. Бернулли.

Эквивалентность рядов И. Бернулли, Тейлора и Маклорена

Как уже отмечалось выше, указанная эквивалентность означает алгебраическую эквивалентность операторных рядов, соответствующих рядам И. Бернулли, Тейлора и Маклорена. Для удобства изложения эти ряды мы также будем называть универсальными.

Теорема 5. Универсальные ряды (2), (4), (5) алгебраически эквивалентны.

Доказательство. Вначале покажем, что (5) и (7) эквивалентны. Для этого умножим справа обе части (7) на $e^{-\alpha D}$. Тогда слева имеем $E^{\alpha}e^{-\alpha D} = \mathbb{1}$, так как по определению $e^{-\alpha D} = E^{\alpha}$. Справа имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^nV_aD^ne^{-aD} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^nV_ae^{-aD}D^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^nV_0D^n$$

в силу равенства 4) из предыдущего раздела и перестановочности операторов D и $e^{-\alpha D}$. Таким образом, из (7) следует (5). Теперь умножим справа обе части (5) на $e^{\alpha D}$. Тогда, используя равенство (5), аналогично получаем, что из ряда (5) следует ряд (7). Ряды (7) и (12) представляют один и тот же оператор $e^{\alpha D}$, и это равенство следует из ряда Тейлора (4). Ранее показано, что это равенство независимо от ряда Тейлора (4) и определяется действиями на степени x^n, рассмотренными во втором разделе.

Алгебраически покажем, что ряд Маклорена прямо следует из ряда И. Бернулли. Действительно, если в сумме $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^nV_0D^n$ подставить вместо V_0 его ряд (2), то получим

$$\mathbb{1} - XD + \frac{1}{2!}X^2D^2 - \dots + X\left(\mathbb{1} - XD - \frac{1}{2!}X^2D^2 - \dots\right)D$$
$$+ \frac{1}{2!}X^2\left(\mathbb{1} - XD + \frac{1}{2!}X^2D^2 - \dots\right)D^2 + \dots$$

В этой сумме количество операндов X^kD^k при каждом $k = 1, 2, ...$ конечно, и их сумма вместе с коэффициентами равна

$$\left[\frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(-1)^{k-2}}{(k-2)!\,2!} + \cdots + \frac{(-1)^0}{0!\,k!}\right] X^k D^k = \frac{(-1)^k}{k!}(1-1)^k X^k D^k = 0\,.$$

Покажем теперь, как из (7) алгебраически следует (12). Для этого в (7) заменим V_α на $V_0 e^{\alpha D}$, в силу равенства 5) в предыдущем разделе. Тогда имеем

$$E^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n V_a D^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n V_0 e^{aD} D^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n V_0 D^n\right) e^{aD} = e^{aD},$$

так как ряд в скобках есть ряд Маклорена и равен $\mathbb{1}$ (5). Выведем теперь ряд Тейлора (4) из ряда Маклорена (5). Для этого умножим ряд (5) слева на $e^{-\alpha D}$, а справа на $e^{\alpha D}$. Тогда слева имеем $e^{-\alpha D}\mathbb{1}e^{\alpha D} = \mathbb{1}$, а справа будем иметь

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-aD} X^n V_0 D^n e^{aD} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-aD} X^n e^{aD} e^{-aD} V_0 e^{aD} D^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-a)^n V_a D^n.$$

Здесь мы использовали формулы 3) и 5) из предыдущего раздела, а также перестановочность операторов D и $e^{\alpha D}$.

Для доказательства теоремы осталось показать, что из ряда Маклорена (5) следует ряд И. Бернулли (2). Для этого покажем, что равенство, которое будем называть уравнением Маклорена,

$$\mathbb{1} = V + \tfrac{1}{1!} XVD + \tfrac{1}{2!} X^2 V D^2 + \cdots \tag{22}$$

рассматриваемое как уравнение относительно неизвестного оператора V, $V \in A_F(P_1)$, имеет единственное решение, представляемое рядом И. Бернулли (2). Так как решение V ищется среди операторов из $A_F(P_1)$, то согласно теореме 1 [Максимов 2019], его можно представить в виде

$$\mathrm{V} = P_0(x) + \frac{1}{1!} P_1(x) D + \frac{1}{2!} P_2(x) D^2 + \frac{1}{3!} P_3(x) D^3 + \cdots, \tag{23}$$

где $P_k(x)$ – полиномы от оператора X над полем F. Подставляя это выражение вместо V в (22), раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$\mathbb{1} = P_0(x) + \left[\frac{1}{1!} P_1(x) + xP_0(x)\right] D + \left[\frac{1}{2!} P_2(x) + \frac{1}{1!} P_1(x) + x^2 P_0(x)\right] D^2 + \cdots$$
$$+ \left[\frac{1}{n!} P_n(x) + \frac{1}{(n-1)!} X P_{n-1}(x) + \frac{1}{0!\,n!} X^n P_0(x)\right] D^n + \cdots \tag{24}$$

Так как представление любого оператора из $A_F(P_1)$ по степеням X, D согласно теореме 1 [Максимов 2019] единственно, то $P_0(x) = \mathbb{1}$, а остальные коэффициенты при степенях D равны нулю. Поэтому получаем единственное решение

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = -x, P_2(x) = x^2, \dots , P_n(x) = (-x)^n, \dots \qquad (25)$$

Этот результат имеет гораздо больший смысл, нежели нахождение представления (2) оператора V_0. Как уже отмечалось, разложение (2) для V_0 не зависит от ряда Тейлора, а следует только из определения функционала V_0 и теоремы 1 [Максимов 2019]. Факт единственности решения V в уравнении (22) подчеркивает уникальность оператора V_0. В многомерном случае этот факт также имеет место и будет рассмотрен далее.

Заметим, что ни ряд Маклорена (5), ни ряд И. Бернулли (2) не выводятся один из другого, а всего лишь доказывается, что одно равенство может быть доказано с помощью другого и обратно. Откуда же появляется «универсальный ряд» Тейлора (4) и откуда возникает равенство (5)? Как пишет Н.Я. Сонин [Сонин 1897], Бертран заметил, что ряд Тейлора возникает из бинома Ньютона, но, к сожалению, не обобщил своего замечания.

Как уже отмечалось, из бинома Ньютона получаем равенство в виде ряда (7), который при $\alpha = 0$ превращается в ряд Маклорена (5). Мы видели, что ряд Маклорена преобразованием подобия с оператором $e^{\alpha D}$ превращается в ряд Тейлора и обратно; поэтому бином Ньютона является носителем равенства Маклорена (5), а также и равенств Тейлора (4) и И. Бернулли (2), вытекающих из единственности решения уравнения (22).

Многомерный случай

Будем рассматривать только двумерный случай, так как увеличение размерности приводит только к усложнению записи. Если обозначить V_{ab} функционал значения в точке (a, b), т. е. $V_{ab}f(x, y) = f(a, b)$, то V_{ab} можно рассматривать, как и V_0, как оператор из $A_F(P_2)$. Поэтому двумерному ряду Тейлора очевидно соответствует «универсальный ряд (равенство)» И. Бернулли

$$\mathbb{1} = V_{ab} + \frac{1}{1!}(X-a)V_{ab}D_x + \frac{1}{1!}(Y-a)V_{ab}D_y + \sum_{i+j>1} \frac{1}{i!\,j!}(X-a)^i(Y-a)^j V_{ab} D_x^i D_y^j \qquad (26)$$

и «универсальный ряд (равенство)» Маклорена

$$\mathbb{1} = V_{00} + \frac{1}{1!} X V_{00} D_x + \frac{1}{1!} Y V_{00} D_y + \sum_{i+j>1} \frac{1}{i!\,j!} X^i Y^j V_{00} D_x^i D_y^j \,, \tag{27}$$

где X – оператор умножения на переменную x, Y – оператор умножения на переменную y, D_x и D_y – операторы дифференцирования по x и y. Очевидно, операторы X и D перестановочны с операторами Y и D_y. Кроме того, рассмотрим функционалы $V_{\alpha y}$, $V_{\alpha b} f(x, y) = f(\alpha, y)$ и V_{xb},$V_{xb} f(x, y) = f(x, b)$. Ясно, что $V_{\alpha b} = V_{\alpha y} V_{xb}$,$V_{xb}$ перестановочны с X, D_x и $V_{\alpha y}$. Аналогично $V_{\alpha y}$ перестановочно Y, D_y и V_{xb}. В частности, $V_{00} = V_{0y} V_{x0}$. Заметим, что в обозначении (13) оператор V_{0y} равен V_{01}, а V_{x0} равен V_{02}.

Теорема 6. Многомерные «универсальные ряды» И. Бернулли, Тейлора и Маклорена алгебраически эквивалентны.

Доказательство. Согласно обозначениям, требуется доказать алгебраическую эквивалентность равенств (15), (26) и (27). Для этого достаточно доказать эквивалентность равенств (26) и (27), а также (27) и (15). Равенства первой пары очевидно эквивалентны, так как (27) есть частный случай (26), а (26) следует из (27), если равенство (27) умножить слева на $e^{-\alpha D_x - b D_y}$, а справа $e^{\alpha D_x + b D_y}$. Тогда слева снова имеем $\mathbb{1}$, а справа каждый член суммы будет равен

$$\frac{1}{i!\,j!} e^{-aD_x - bD_y} X^i Y^j V_{00} D_x^i D_y^j e^{aD_x + bD_y} \,.$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\frac{1}{i!\,j!} e^{-aD_x} X^j e^{aD_x} Y^i e^{bD_y} e^{-aD_x} V_{0y} e^{aD_x} e^{-bD_y} V_{x0} e^{bD_y} D_x^i D_y^j \tag{28}$$

Используя формулы 1)–5) из четвертого раздела и указанные выше соотношения между X, D_x, Y, D_y и V_{0y}, V_{x0}, выражение (28) приводим к виду

$$\frac{1}{i!\,j!} (X - a)^i (Y - b)^j V_{ab} D_x^i D_y^j,$$

что является соответствующим членом «универсального равенства» Тейлора.

Двумерный «универсальный ряд» И. Бернулли, согласно (15), принимает вид

$$V_{00} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i+j<m} \frac{(-1)^{i+j}}{i!\,j!} X^i Y^i D_x^i D_y^j \,. \tag{29}$$

Для того чтобы доказать «Универсальное равенство» Маклорена (27), достаточно, аналогично одномерному случаю, в правую часть (27) вместо V_{00} подставить его выражение (29). После раскрытия скобок и приведения подобных членов выражение примет вид

$$\sum_{m,n\geq 0} \mathrm{C}_{m,n} X^m Y^n D_x^m D_y^n,$$

так как число членов $X^m Y^n D_x^m D_y^n$ всегда оказывается конечным.

Если $m = n = 0$, то, очевидно, $\mathrm{C}_{00} = \mathbb{1}$. Если m + n ≥ 1, то каждый член $\mathrm{C}_{m,n} X^m Y^n D_x^m D_y^n$, как легко видеть, образован суммой

$$\sum_{\substack{k+s=m\\ l+t=n}} \frac{(-1)^{k+l}}{k!\,l!\,s!\,t!} X^{k+s} Y^{l+s} D_x^{k+s} D_y^{l+t} = \left(\sum_{\substack{k+s=m\\ l+t=n}} \frac{(-1)^k}{k!\,s!} \frac{(-1)^l}{l!\,t!} \right) X^m Y^n D_x^m D_y^n.$$

Но

$$\sum_{\substack{k+s=m\\ l+t=n}} \frac{(-1)^k (-1)^l}{k!\,l!\,s!\,t!} = \frac{1}{m!\,n!} \left[\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \right] \left[\sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} \right] = \frac{1}{m!\,n!} (1-1)^m (1-1)^n = 0\,,$$

таким образом, равенство (27) следует из (29) (двумерный случай).

Покажем теперь, как из (27) следует (29). Для этого, как и в одномерном случае, рассмотрим уравнение типа (22) уравнения Маклорена, только в многомерном случае. Тогда имеет место

Теорема 7. Уравнение относительно неизвестного оператора $V \in A_F(P_s)$

$$\mathbb{1} = V + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v_1+\cdots+v_s=m} \frac{1}{v_1! \ldots v_s!} X_1^{v_1} \ldots X_s^{v_s} V D_{x_1}^{v_1} \ldots D_{x_s}^{v_s} \tag{30}$$

(многомерное уравнение Маклорена) имеет единственное решение

$$V = V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v_1+\cdots+v_s=m} \frac{1}{v_1! \ldots v_s!} (-1)^{v_1+\cdots+v_s} X_1^{v_1} \ldots X_s^{v_s} V D_1^{v_1} \ldots D_s^{v_s},$$

что является многомерным «Универсальным рядом» И. Бернулли.

Доказательство. Доказательство проверяем в случае $s = 2$, так как при $s \geq 3$ схема доказательства остается без изменений. Если

V – некоторое решение (30), $V \in A_F(P_s)$, то, согласно теореме 1, V можно представить в виде

$$V = P_0(X,Y) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s+t=n} \frac{1}{s!\,t!} P_{st}(X,Y) D_x^s D_y^t. \tag{31}$$

Подставляя это выражение V в уравнение (30) для двумерного случая, получим

$$\mathbb{1} = \sum_{n \geq 0, m \geq 0}^{\infty} \sum_{\substack{k+s=n \\ l+t=m}} \frac{1}{k!\,s!\,l!\,t!} X^n Y^l P_{st}(X,Y) D_x^{k+s} D_y^{l+t}. \tag{32}$$

Поэтому коэффициент при степенях $D_x^n D_y^m$ будет равен

$$C_{nm} = \sum_{\substack{k+s=n \\ l+t=m}} \frac{1}{k!\,s!\,l!\,t!} X^k Y^l P_{st}(X,Y), C_{00} = 1, C_{n,m} = 0\,. \tag{33}$$

Очевидно, одно решение этой системы будет $P_{st}(X, Y) = (-X)^s(-Y)^t$, что соответствует разложению V_{00} (15). Итак, V_{00} является решением уравнения (30). Покажем, что других решений уравнение (30) не имеет. Действительно, система равенств (33) представляет счетную систему линейных уравнений для неизвестных полиномов $P_{st}(X, Y)$. Идея доказательства единственности решения V_{00} (15) состоит в выделении из линейной системы (33) подсистем линейных уравнений, в которых m – фиксировано. То есть мы будем рассматривать подсистемы

1) $c_{00} = 1, c_{10} = c_{20} = ... = 0$
2) $c_{01} = c_{11} = c_{21} = ... = 0$
3) $c_{02} = c_{12} = c_{22} = ... = 0$

и так далее. Каждая такая система в силу формулы (33) имеет треугольную матрицу с ненулевыми элементами на главной диагонали.

Рассмотрим систему 1). Так как в этом случае $m = l + t + 0$, то имеем $l = t = 0$. Следовательно, уравнения этой системы, вследствие (33), равны

$$P_{00}(X,Y) = 1$$
$$XP_{00}(X,Y) + P_{01}(X,Y) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n!}X^n P_{n0}(X,Y)+\frac{1}{(n-1)!\,1!}x^{n-1}P_{10}(X,Y)+\frac{1}{(n-2)!\,2!}x^{n-2}P_{20}(X,Y)+\cdots+P_{n,0}(X,Y)=0$$

....

Очевидно, имеется единственное решение $P_{n,0}(X,Y) = (-x)^n$.

Вторая система состоит из коэффициентов при $D_x^n D_y^1$, приравненных к нулю. Поэтому из (33) имеем

$$YP_{00}(X,Y)+YP_{01}(X,Y)=0$$

$$\frac{1}{1!\,0!}XYP_{a0}(X,Y)+\frac{1}{0!\,1!}YP_{10}(X,Y)+\frac{1}{1!\,0!}XP_{01}(X,Y)+\frac{1}{0!\,1!}P_{1,1}(X,Y)=0$$

....

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{1}{(n-s)!\,s!}X^{n-s}YP_{s,0}(X,Y)+\sum_{s=0}^{n}\frac{1}{(n-s)!\,s!}X^{n-s}P_{s,1}(X,Y)=0$$

Из первого уравнения имеем $P_{01}(X,Y) = (-Y)$. В остальных уравнениях сумма членов, содержащих Y при замене $P_{s,0}(X,Y)$ на $(-Y)^s$, очевидно, равна нулю. Поэтому оставшаяся система относительно неизвестных $P_{s,1}^{(X,Y)}$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ имеет треугольную матрицу и, следовательно, имеет единственное решение $P_{s,1}(X,Y) = (-X)^S(-Y)$.

Распишем подробнее еще третью систему, состоящую из

$$\frac{Y^2}{2!\,0!}P_{00}(X,Y)+\frac{Y}{1!\,1!}P_{10}(X,Y)+\frac{1}{2!}P_{02}(X,Y)=1$$

....

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{X^{n-s}}{(n-s)!\,s!}\frac{Y^2}{2!\,0!}P_{s,0}(X,Y)+\sum_{s=0}^{n}\frac{X^{n-s}}{(n-s)!\,s!}\frac{Y}{1!\,1!}P_{s,1}(X,Y)+\sum_{s=0}^{n}\frac{X^{n-s}}{(n-s)!\,s!}\frac{1}{0!\,2!}P_{s,2}(X,Y)=0$$

Так как $P_{00}(X,Y) = 1$, $P_{01}(X,Y) = (-Y)$, то из первого уравнения этой системы получаем $P_{02}(X,Y) = Y^2 = (-Y)^2$.

В остальных уравнениях системы суммы, содержащие $\frac{Y^2}{2!0!}$ и $\frac{Y}{1!1!}$ при замене $P_{s,2}(X,Y)$ на $(-X)^S$ и замене $P_{s,1}(X,Y)$ на $(-X)^S(-Y)$, очевидно, становятся равными нулю. Итак, система 3) является неоднородной системой для $P_{s,2}(X,Y)$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ с треугольной матрицей, у которой ненулевые диагональные элементы. Следовательно, имеется единственное решение $P_{s,2}(X,Y) = (-X)^S(-Y)^2$.

Теперь предположим по индукции, что первые m систем имеют единственное решение, следовательно, $P_{s,m}(X,Y) = (-X)^S(-Y)^m$.

Первое уравнение $(m + 1)$-й системы имеет вид

$$\frac{Y^m}{m!\,0!}P_{00}(X,Y) + \frac{Y^{m-1}}{(m-1)!\,1!}P_{01}(X,Y) + \cdots + \frac{Y^1}{1!\,(m-1)!}P_{0,m-1}(X,Y) + \frac{1}{0!\,m!}P_{0m}(X,Y) = 0$$

Следующие уравнения системы будут иметь вид:

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{X^{n-s}}{(n-s)!\,s!}\frac{Y^m}{m!\,0!}P_{s,0}(X,Y) + \sum_{s=0}^{n}\frac{X^{n-s}}{(n-s)!\,s!}\frac{Y^{m-1}}{(m-1)!\,1!}P_{s,1}(X,Y)$$
$$+ \sum_{s=0}^{n}\frac{X^{n-s}}{(n-s)!\,s!}\frac{Y^{m-2}}{(m-2)!\,2!}P_{s,2}(X,Y) + \cdots$$
$$+ \sum_{s=0}^{n}\frac{X^{n-s}}{(n-s)!\,s!}\frac{Y^1}{1!\,(m-1)!}P_{s,m-1}(X,Y) + \sum_{s=0}^{n}\frac{X^{n-s}}{(n-s)!\,s!}\frac{1}{0!\,m!}P_{s,m}(X,Y) = 0$$

По предположению индукции имеем $P_{s,k}(X,Y) = (-X)^S(-Y)^k$ при $k < m$. Поэтому каждая сумма, содержащая множитель $\frac{Y^{m-k}}{(m-k)!k!}$, $\mathrm{m} - k > 0$, будет равна нулю. Действительно, пусть $\mathrm{m} - k > 0$. Тогда

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{X^{n-s}}{(n-s)!\,s!}\frac{Y^{m-k}}{(m-k)!\,k!}P_{s,k}(X,Y) = \frac{Y^{m-k}}{(m-k)!\,k!}(-Y)^k\frac{1}{n!}\sum_{s=0}^{n}\frac{n!\,X^{n-s}}{(n-s)!\,s!}(-X)^s$$
$$= \frac{Y^{m-k}}{(m-k)!\,k!}(-Y)^k\frac{1}{n!}(x-x)^m = 0.$$

Здесь мы воспользовались индукцией и заменили $P_{s,k}(X,Y)$ на $(-X)^S(-Y)^k$, при $k < m$.

Таким образом, $(m + 1)$-я система превращается в линейную систему, где первое уравнение есть $P_{0,m}(X,Y) = (-Y)^m$, а остальные уравнения имеют вид

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{X^s}{(m-s)!\,s!}\frac{1}{0!\,m!}P_{s,m}(X,Y) = 0,\ m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (34)$$

Это линейная система с треугольной матрицей с ненулевыми элементами на диагонали. Причем первое уравнение неоднородно и сразу дает решение $P_{0,k}(X,Y) = (-Y)^m$. Следовательно, существующее решение системы единственно и равно $P_{s,m}(X,Y) = (-X)^S(-Y)^m$. Эти решения получаются подстановкой $P_{0,m}(X,Y) = (-Y)^m$ в следующее уравнение, соответствующее $n = 1$. Получаем $P_{1,m}(X,Y) =$

$= (-X)\,(-Y)^m$ и так далее. Если уже $P_{0,m}(X,Y), \ldots, P_{n-1,m}(X,Y)$ известны и $P_{s,m}(X,Y) = (-X)^S(-Y)^m$ для всех $s < n$, то, подставляя их в уравнения (34), получим $P_{n,m}(X,Y) = (-X)^n(-Y)^m$.

Тем самым доказана и теорема 6.

Заключение

После почти 200 лет анализа, получения частных закономерностей и анализа исследована алгебраическая сущность рядов Тейлора и И. Бернулли. Для этого рассмотрена алгебра всех линейных отображений пространства полиномов от S переменных в себя над произвольным полем характеристики нуль. Формулы Тейлора и И. Бернулли строятся с помощью операторов сдвига, дифференцирования и умножения на переменную, а также функционала значения в нуле. Все эти операторы входят в алгебру линейных отображений. Поскольку каждый оператор взаимно однозначно соответствует ряду по степеням дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами слева от операторов умножения на переменные, то ряды Тейлора и И. Бернулли являются эквивалентными формами разложения операторов сдвига в алгебре линейных отображений. Доказано, что эти формулы алгебраически выводятся одна из другой, следовательно, они эквивалентны. В силу рассмотрения произвольных полей характеристики нуль результаты справедливы для p-адического анализа и многомерного случая.

Литература

Висков 1975 – *Висков О.В.* Операторная характеризация обобщенных полиномов Аппеля // Доклады Академии наук СССР. 1975. Т. 225. № 4. С. 1521–1524.

Висков 1993 – *Висков О.В.* Формула сложения для полиномов Эрмита // Доклады Академии наук. 1993. Т. 330. № 1. С. 12–14.

Висков 1996 – *Висков О.В.* Разложение по степеням некоммутативных биномов // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 1996. Т. 216. С. 63–69.

Максимов 2019 – *Максимов В.М.* Представление алгебры линейного отображения пространства полиномов в себя некоммутативными рядами // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2019. № 3. С. 72–93.

Сонин 1897 – *Сонин Н.Я.* Ряд Ивана Бернулли // Известия Императорской академии Наук. 1897, ноябрь. Т. VII. № 4. С. 337–359.

Rota, Doubilet 1975 – *Rota G.-C., Doubilet P.* Finite Operator calculus. New York: Academic Press, Inc., 1975.

References

Maximov, V.M. (2019), "Representation of the linear mapping algebra for polynomial spaces into themselves by non-commutative series", *RSUH/RGGU Bulletin. "Information Science. Information security. Mathematics" Series,* vol. 3, pp. 72–93.

Rota, G.-C. and Doubilet, P. (1975), *Finite Operator calculus,* Academic Press, Inc. New York, NY, USA.

Sonin, N.Ya. (1897), "John Bernoulli series", *News of the Imperial Academy of Sciences,* vol. VII, no. 4, pp. 337–359.

Viskov, O.V. (1975), "Operator characterization of generalized Appel polynomials", *USSR Academy of Sciences Reports,* vol. 225, no. 4, pp. 1521–1524.

Viskov, O.V. (1993), "Addition formula for Hermite polynomials", *Academy of Sciences Reports,* vol. 330, no. 1, pp. 12–14.

Viskov, O.V. (1996), "Decomposition in powers of noncommutative binomials", *Transactions of Steklov Mathematical Institute,* vol. 216, pp. 63–69.

Информация об авторе

Валерий М. Максимов, доктор физико-математических наук, профессор, Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия; 125993, Россия, Москва, Миусская пл., д. 6;

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия; 117198, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; VM_MAXIMOV@mail.ru

Information about the author

Valery M. Maximov, Dr. of Sci. (Mathematics), professor, Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia; bld. 6, Miusskaya Sq., Moscow, Russia, 125993;

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russia; bld. 6, Miklouho-Maclay Str., Moscow, Russia, 117198; VM_MAXIMOV@mail.ru

Дизайн обложки
Е.В. Амосова

Корректор
А.А. Леонтьева

Компьютерная верстка
Н.В. Москвина

Подписано в печать 24.03.2020.
Формат 60×90 1/16.
Уч.-изд. л. 8,0. Усл. печ. л. 7,6.
Тираж 1050 экз. Заказ № 903

Издательский центр
Российского государственного
гуманитарного университета
125993, Москва, Миусская пл., 6
www.rggu.ru
www.knigirggu.ru