

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«Российский государственный гуманитарный университет»
(ФГБОУ ВО «РГУ»)**

ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ НАУК И ТЕХНОЛОГИЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Факультет информационных систем и безопасности
Кафедра фундаментальной и прикладной математики

КОНЕЧНЫЕ ПОЛЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К КРИПТОГРАФИИ

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Направление подготовки 01.03.04 Прикладная математика
Направленность (профиль) Математика информационных сред

Уровень квалификации выпускника - бакалавр
Форма обучения - очная

РПД адаптирована для лиц
с ограниченными возможностями
здоровья и инвалидов

Москва 2019

КОНЕЧНЫЕ ПОЛЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К КРИПТОГРАФИИ

Рабочая программа дисциплины

Составители:

Д. пед. н., профессор, зав. кафедрой фундаментальной и прикладной математики
*В.К. Жаров*Д. ф.-м. н., профессор, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики
В.М. Максимов

Ответственный редактор

Д. пед. н., профессор, зав. кафедрой фундаментальной и прикладной математики
*В.К. Жаров*Технический редактор: специалист УМР 1 категории кафедры фундаментальной и прикладной математики *Гусева Т.А.*

УТВЕРЖДЕНО

Протокол заседания кафедры
фундаментальной и прикладной математики
№ 13 от 28.06.19

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Пояснительная записка

1.1 Цель и задачи дисциплины

1.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

1.3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

2. Структура дисциплины

3. Содержание дисциплины

4. Образовательные технологии

5. Оценка планируемых результатов обучения

5.1. Система оценивания

5.2. Критерии выставления оценки по дисциплине

5.3. Оценочные средства (материалы) для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

6.1. Список источников и литературы

6.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

8. Обеспечение образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

9. Методические материалы

9.1. Планы практических занятий

9.2. Методические рекомендации по подготовке письменных работ

Приложения

Приложение 1. Аннотация дисциплины

Приложение 2. Лист изменений

1. Пояснительная записка

1.1. Цель и задачи дисциплины

Цель дисциплины: показать теорию и задачи, решаемые с её помощью имеющие богатое практическое применение в реальной практике работы в экономической сфере, технике и в задачах защиты информации.

Задачи дисциплины: в результате изучения дисциплины студенты должны владеть основными математическими понятиями курса; уметь решать типовые задачи, иметь навыки работы со специальной математической литературой, уметь использовать математический аппарат для решения теоретических и прикладных задач.

1.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

Компетенция (код и наименование)	Индикаторы компетенций (код и наименование)	Результаты обучения
ПКУ-2. Способен выделять, формулировать возникающие в результате самостоятельной научной деятельности или деятельности научных, производственных, административных учреждений задачи или подзадачи для решения текущих проблем	ПКУ-2.1. Владеет навыками работы с информационными системами	Знать: основные теоремы теории чисел, используемые в криптологии; основные теоретико-числовые алгоритмы; Уметь: программно реализовывать основные теоретико-числовые и получисленные алгоритмы в криптографических приложениях; выполнять построение криптосистем на основе готовых криптографических библиотек; Владеть: навыками работы с алгоритмами криптоанализа ассиметричных криптосистем.
	ПКУ-2.2. Рассматривает социотехнические системы как совокупность информационных систем	Знать: основные теоретико-числовые алгоритмы; основные алгоритмы, реализующие арифметические операции в основных алгебраических структурах, используемых в криптографических приложениях; Уметь: выполнять построение криптосистем на основе готовых криптографических библиотек; проводить математическое моделирование в криптологии; приводить математическое доказательство работоспособности предложенной криптосистемы; Владеть: навыками работы с алгоритмами криптоанализа ассиметричных криптосистем.
	ПКУ-2.3. В совершенстве владеет методами передачи информации и применения пакетов прикладных программ	Знать: основные алгоритмы, реализующие арифметические операции в основных алгебраических структурах, используемых в криптографических приложениях; Уметь: проводить математическое моделирование в криптологии; приводить математическое

		доказательство работоспособности предложенной криптосистемы; Владеть: навыками работы с алгоритмами криптоанализа ассиметричных криптосистем.
--	--	---

1.3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Конечные поля и их приложения к криптографии» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений части блока дисциплин учебного плана.

Для освоения дисциплины необходимы знания, умения и владения, сформированные в ходе изучения следующих дисциплин (модулей): «Математический анализ», «Общая алгебра и теория чисел», «Функциональный анализ».

В результате освоения дисциплины формируются знания, умения и владения, необходимые для прохождения Производственной практики (Научно-исследовательская работа) и написания выпускной квалификационной работы.

2. Структура дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 4 з.е., 144 ч., в том числе контактная работа обучающихся с преподавателем 56 ч., промежуточная аттестация 18 ч., самостоятельная работа обучающихся 70 ч.

№ п/п	Раздел дисциплины/темы	Семестр	Виды учебной работы (в часах)				Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			контактная		Промежуточная аттестация	Самостоятельная работа	
			Лекции	Практические занятия			
1	Определение колец и полей. Кольца без делителей нуля	8	2	4		8	
2	Конечные поля и кольца. Характеристика поля и кольца.	8	2	4		8	
3	Число элементов конечного поля. Поле вычетов по модулю p .	8	2	4		8	Опрос. Расчетно-графическая работа (РГР)
4	Кольцо многочленов из данного конечного поля. Теорема Безу. Неприводимость многочленов.	8	4	4		8	Рефераты, доклады
5	Простое алгебраическое расширение конечного поля.	8	4	4		8	
6	Поля разложение данного многочлена над конечным полем Теорема	8	4	4		10	Коллоквиум

№ п/п	Раздел дисциплины/темы	Семестр	Виды учебной работы (в часах)				Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			контактная		Промежуточная аттестация	Самостоятельная работа	
			Лекции	Практические занятия			
	существования.						
7	Теорема о существовании конечного поля числом элементов .	8	4	4		10	Защита РГР
8	Применение конечных полей в криптоалгоритмах.	8	2	4		10	Рефераты, доклады
9	Экзамен	8			18		Экзамен по билетам
	Итого:		24	32	18	70	

3. Содержание дисциплины

Тема 1. Определение колец и полей. Кольца без делителей нуля. Основные понятия. Идеалы, Фактор кольца: свойства.

Тема 2. Конечные поля и кольца. Характеристика поля и кольца. Простые поля. Характеристики поля и кольца. Кольца частных. Числовые поля.

Тема 3. Число элементов конечного поля. Поле вычетов по модулю p . Поле p -адических чисел. Примеры нечисловых полей. Символические присоединения. Конечные поля (приложения).

Тема 4. Кольцо многочленов из данного конечного поля. Теорема Безу. Неприводимые многочлены.

Нормирование алгебраических полей: общий случай. Нормирование полей алгебраических чисел. Теорема Островского.

Тема 5. Простое алгебраическое расширение конечного поля.

Арифметические операции в \mathbb{Q}_p . p -адические разложения рациональных чисел. Лемма Гензеля.

Тема 6. Поля разложение данного многочлена над конечным полем Теорема существования. Теорема о разложение над универсальным полем.

Тема 7. Теорема о существовании конечного поля числом элементов p .

Тема 8. Применение конечных полей в криптоалгоритмах. Примеры p -адических шифров.

4. Образовательные технологии

№ п/п	Наименование раздела	Виды учебных занятий	Образовательные технологии
1	2	3	4
1	Определение колец и полей. Кольца без делителей нуля	Лекция Практическое занятие Самостоятельная работа	Вводная лекция. Решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков Консультирование и проверка домашних заданий посредством

			электронной почты
2	Конечные поля и кольца. Характеристика поля и кольца.	Лекция Практическое занятие Самостоятельная работа	Проблемная лекция Решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков Подготовка к занятию с использованием электронного курса лекций
3	Число элементов конечного поля. Поле вычетов по модулю p .	Лекция Практическое занятие Самостоятельная работа	Проблемная лекция Решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков Подготовка к занятию с использованием электронного курса лекций
4	Кольцо многочленов из данного конечного поля. Теорема Безу. Неприводимые многочлены	Лекция Практическое занятие Самостоятельная работа	Проблемная лекция Решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков Подготовка к занятию с использованием электронного курса лекций
5	Простое алгебраическое расширение конечного поля.	Лекция Практическое занятие Самостоятельная работа	Проблемная лекция Решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков Подготовка к занятию с использованием электронного курса лекций.
6	Поля разложение данного многочлена над конечным полем Теорема существования.	Лекция Практическое занятие Самостоятельная работа	Проблемная лекция Решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков Подготовка к занятию с использованием электронного курса лекций.
7	Теорема о существовании конечного поля числом элементов.	Лекция Практическое занятие Самостоятельная работа	Проблемная лекция Решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков Подготовка к занятию с использованием электронного курса лекций.
8	Применение конечных полей в криптоалгоритмах.	Лекция	Проблемная лекция

	Практическое занятие	Решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков
	Самостоятельная работа	Подготовка к занятию с использованием электронного курса лекций.

5. Оценка планируемых результатов обучения

5.1. Система оценивания

Форма контроля	Макс. количество баллов	
	За одну работу	Всего
Текущий контроль: - опрос, доклад, реферат - РГР, защита РГР - коллоквиум	6 баллов 20 баллов 10 баллов	30 баллов 20 баллов 10 баллов
Промежуточная аттестация (Экзамен по билетам)		40 баллов
Итого за семестр (дисциплину) Экзамен		100 баллов

Полученный совокупный результат конвертируется в традиционную шкалу оценок и в шкалу оценок Европейской системы переноса и накопления кредитов (European Credit Transfer System; далее – ECTS) в соответствии с таблицей:

100-балльная шкала	Традиционная шкала	Шкала ECTS	
95 – 100	отлично	A	
83 – 94		B	
68 – 82	хорошо	зачтено	
56 – 67	удовлетворительно		D
50 – 55			E
20 – 49	неудовлетворительно	FX	
0 – 19		не зачтено	F

5.2. Критерии выставления оценки по дисциплине

Баллы/ Шкала ECTS	Оценка по дисциплине	Критерии оценки результатов обучения по дисциплине
100-83/ A,B	«отлично»	<p>Выставляется обучающемуся, если он глубоко и прочно усвоил теоретический и практический материал, может продемонстрировать это на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся исчерпывающе и логически стройно излагает учебный материал, умеет увязывать теорию с практикой, справляется с решением задач профессиональной направленности высокого уровня сложности, правильно обосновывает принятые решения.</p> <p>Свободно ориентируется в учебной и профессиональной литературе.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «высокий».</p>

Баллы/ Шкала ECTS	Оценка по дисциплине	Критерии оценки результатов обучения по дисциплине
82-68/ С	«хорошо»	<p>Выставляется обучающемуся, если он знает теоретический и практический материал, грамотно и по существу излагает его на занятиях и в ходе промежуточной аттестации, не допуская существенных неточностей.</p> <p>Обучающийся правильно применяет теоретические положения при решении практических задач профессиональной направленности разного уровня сложности, владеет необходимыми для этого навыками и приёмами.</p> <p>Достаточно хорошо ориентируется в учебной и профессиональной литературе.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «хороший».</p>
67-50/ D,E	«удовлетворительно»	<p>Выставляется обучающемуся, если он знает на базовом уровне теоретический и практический материал, допускает отдельные ошибки при его изложении на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся испытывает определённые затруднения в применении теоретических положений при решении практических задач профессиональной направленности стандартного уровня сложности, владеет необходимыми для этого базовыми навыками и приёмами.</p> <p>Демонстрирует достаточный уровень знания учебной литературы по дисциплине.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «достаточный».</p>
49-0/ F,FX	«неудовлетворительно»	<p>Выставляется обучающемуся, если он не знает на базовом уровне теоретический и практический материал, допускает грубые ошибки при его изложении на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся испытывает серьёзные затруднения в применении теоретических положений при решении практических задач профессиональной направленности стандартного уровня сложности, не владеет необходимыми для этого навыками и приёмами.</p> <p>Демонстрирует фрагментарные знания учебной литературы по дисциплине.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции на уровне «достаточный», закреплённые за дисциплиной, не сформированы.</p>

5.3. Оценочные средства (материалы) для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Текущий контроль

Примерные темы рефератов, докладов

1. Символическое присоединение

2. Поля разложения
3. Расширения числовых полей
4. Определение поля p -адических чисел
5. Поля Галуа
6. Норма p -адического числа
7. Арифметические операции в \mathbb{Q}_p
8. p -адическое продолжение рациональных чисел
9. Лемма Гензеля
10. Метрика и норма для рациональных чисел. Теорема Островского
11. Последовательности и ряды p -адических чисел
12. p -адические функции
13. Дифференцирование p -адических функций
14. Интегрирование p -адических функций

Примерные вопросы для коллоквиума

1. Построение поля действительных чисел.
2. Нормированные поля.
3. Пополнение нормированного поля.
4. Поле p -адических чисел.
5. p -адическое разложение рациональных чисел.
6. Алгебраические свойства целых p -адических чисел.
7. Метрики и нормы на поле p -адических чисел.
8. Теорема Островского.
9. Элементарные функции, определенные на поле p -адических чисел.
10. Нули p -адических степенных рядов
11. Свойства p -адических экспонент и логарифмов.
12. Локально постоянные функции.
13. Дифференцируемость p -адических чисел.

Примерные задания для РГР

1. Верно ли, что мультипликативная группа F_q^* поля F_q - циклическая группа порядка $q-1$.
2. Всякий полином $f(x) \in F_p[x]$ степени m является делителем полинома $x^{p^m} - x$ для произвольного натурального c .
3. Множество полиномов $p(x) \in F_p[x]$ делящих полином $x^{p^m} - x$, представляет совокупность всех неприводимых полиномов степени n для всех делителей n чисел m .
4. Пусть $\varphi: F_q \rightarrow F_q$ произвольное отображение поля F_q в себя. Покажите, что функция $\varphi(x)$ может быть представлена полиномом с коэффициентами из F_q степени не большей, чем $q-1$.

Промежуточная аттестация

Примерные контрольные вопросы по курсу

1. Нормированные поля.
2. Пополнение нормированного поля.
3. Поле p -адических чисел.
4. p -Адическое разложение рациональных чисел.
5. Алгебраические свойства целых p -адических чисел.
6. Метрики и нормы на поле p -адических чисел.
7. Теорема Островского.
8. Элементарные функции, определенные на поле p -адических чисел.
9. Нули p -адических степенных рядов
10. Свойства p -адических экспонент и логарифмов.
11. Локально постоянные функции.
12. Дифференцируемость p -адических чисел.

Примерные практические задания

- 1) Для каждого из следующих чисел $n = 19, 27, 60$ найти в кольце \mathbb{Z}/n Все делители нуля, все единицы и обратные к ним элементы.
- 2) Пусть $f(X) = X^2 - 2 \in \mathbb{Z}[X]$. Для каждого из простых чисел $p = 2, 3, 7$ установить, существует или нет корень $f(X)$:
 а) $\text{mod } p$, б) $\text{mod } p^2$, в) $\text{mod } p^3$, г) $\text{mod } p^4$.
- 3) Найти генератор циклической группы единиц $(\mathbb{Z}/n)^\times$ в каждом из следующих колец:
 а) $\mathbb{Z}/23$, б) $\mathbb{Z}/27$, в) $\mathbb{Z}/10$.
- 4) Используя лемму Гензеля решить уравнения:
 а) $X^2 + 6 \equiv 0 \pmod{625}$ б) $X^2 + X + 8 \equiv 0 \pmod{2401}$
- 5) Пусть p простое число, $x \in \mathbb{Q}$, Рассмотрим последовательность e_n , где

$$e_n = \sum_{0 \leq i \leq n} \frac{x^i}{i!}$$
 Показать, что последовательность e_n является фундаментальной относительно нормы $|\cdot|_p$, если (а) $|x|_p < 1$, или (б) $p=2$ и $|x|_2 < 1/2$.
- 6) Дан p -адический степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p^{-n} x^n$ найти множество сходимости ряда и нули его суммы.
- 7) Функция $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$ определена равенством $f\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 p^n$. Доказать непрерывность f .

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

6.1. Список источников и литературы

Литература

Основная

1. Коблиц Нил. Курс теории чисел и криптографии / Н. Коблиц; [пер. с англ. М. А. Михайловой и В. Е. Тараканова под ред. А. М. Зубкова]. - М.: ТВП, 2001. - X, 260 с.

Дополнительная

1. Рудин Уолтер. Основы математического анализа / Уолтер Рудин; Пер. с англ. В.П. Хавина. - Изд. 3-е, стер. - СПб. : Лань, 2002. - 319 с.
2. Кириллов А.А. Что такое число?. - М.: Наука, 1993. - 78с.

6.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Единое окно доступа к образовательным ресурсам - <http://window.edu.ru/window/library>
2. Дифференциальное исчисление - <http://math.ru/lib/3>

Перечень современных профессиональных баз данных (БД) и информационно-справочных систем (ИСС)

№п/п	Наименование
1	Международные реферативные наукометрические БД, доступные в рамках национальной подписки в 2019 г. Web of Science Scopus
2	Профессиональные полнотекстовые БД, доступные в рамках национальной подписки в 2019 г. Журналы Cambridge University Press ProQuest Dissertation & Theses Global SAGE Journals Журналы Taylor and Francis
4	Компьютерные справочные правовые системы Консультант Плюс, Гарант

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для материально-технического обеспечения дисциплины необходимы:

- учебная аудитория,
- доска,
- проектор (стационарный или переносной),
- компьютер или ноутбук,
- программное обеспечение (ПО).

Перечень программного обеспечения (ПО)

№п/п	Наименование ПО	Производитель	Способ распространения
1	Microsoft Office 2010 Pro	Microsoft	лицензионное
2	Windows XP/Windows 7/Windows 10	Microsoft	лицензионное
3	Kaspersky Endpoint Security	Kaspersky	лицензионное

8. Обеспечение образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В ходе реализации дисциплины используются следующие дополнительные методы обучения, текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в зависимости от их индивидуальных особенностей:

- для слепых и слабовидящих:
 - лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;
 - письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением, или могут быть заменены устным ответом;
 - обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс;
 - для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство; возможно также использование собственных увеличивающих устройств;
 - письменные задания оформляются увеличенным шрифтом;
 - экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.
- для глухих и слабослышащих:
 - лекции оформляются в виде электронного документа, либо предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;
 - письменные задания выполняются на компьютере в письменной форме;
 - экзамен и зачёт проводятся в письменной форме на компьютере; возможно проведение в форме тестирования.
- для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
 - лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;
 - письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением;
 - экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

При необходимости предусматривается увеличение времени для подготовки ответа.

Процедура проведения промежуточной аттестации для обучающихся устанавливается с учётом их индивидуальных психофизических особенностей. Промежуточная аттестация может проводиться в несколько этапов.

При проведении процедуры оценивания результатов обучения предусматривается использование технических средств, необходимых в связи с индивидуальными особенностями обучающихся. Эти средства могут быть предоставлены университетом, или могут использоваться собственные технические средства.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

Обеспечивается доступ к информационным и библиографическим ресурсам в сети Интернет для каждого обучающегося в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

- для слепых и слабовидящих:
 - в печатной форме увеличенным шрифтом;
 - в форме электронного документа;
 - в форме аудиофайла.
- для глухих и слабослышащих:
 - в печатной форме;
 - в форме электронного документа.
- для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата:

- в печатной форме;
- в форме электронного документа;
- в форме аудиофайла.

Учебные аудитории для всех видов контактной и самостоятельной работы, научная библиотека и иные помещения для обучения оснащены специальным оборудованием и учебными местами с техническими средствами обучения:

- для слепых и слабовидящих:
 - устройством для сканирования и чтения с камерой SARA CE;
 - дисплеем Брайля PAC Mate 20;
 - принтером Брайля EmBraille ViewPlus;
- для глухих и слабослышащих:
 - автоматизированным рабочим местом для людей с нарушением слуха и слабослышащих;
 - акустический усилитель и колонки;
- для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
 - передвижными, регулируемые эргономическими партами СИ-1;
 - компьютерной техникой со специальным программным обеспечением.

9. Методические материалы

9.1. Планы практических занятий

Тема 1. Конечные поля и кольца. Характеристика поля и кольца.

Цель занятия: Основные понятия конечных полей и колец.

Форма проведения – решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков.

Задания:

1. Докажите, что число рационально тогда и только тогда, когда представляющая его бесконечная десятичная дробь является периодической.
2. Докажите, что для любой последовательности Коши рациональных чисел относительно евклидова расстояния существует эквивалентная ей последовательность частичных сумм ряда вида (1.2).
3. Используя представление действительных чисел в виде бесконечных десятичных дробей, докажите, что множество действительных чисел полно относительно евклидова расстояния, т. е. что любая последовательность Коши, состоящая из действительных чисел, имеет предел.
5. Докажите, что следующие метрические пространства не являются полными, и постройте их пополнения:
 A с расстоянием $d(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$;
 R с расстоянием $d(x, y) = |e^x - e^y|$.
6. Докажите, что метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда любая последовательность вложенных замкнутых шаров $\{B_n\}$, $B] D B_2 D B_3 D \dots$, радиусы которых стремятся к нулю, имеет единственную общую точку.

Контрольные вопросы:

Построение поля действительных чисел.

Нормированные поля.

Тема 2. Число элементов конечного поля. Поле вычетов по модулю p .

Цель занятия: Поле вычетов по модулю p .

Форма проведения – решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков.

Задания:

1. Целые числа 2, 3, 4 обратимы в Z_5 . Найдите 5-адические разложения обратных к ним.
2. Найдите разложение числа $1/3$ в Z_m .
3. Найдите 4 цифры канонических разложений следующих p -адических чисел:
1) $\dots 1211$ в Q_7 ; $1 : \dots 1323$ в Z_5 ;
2) $900 - \dots 312,3$ в Q_{11} ;

Контрольные вопросы:

Поле p -адических чисел.

p -адическое разложение рациональных чисел.

Алгебраические свойства целых p -адических чисел.

Метрики и нормы на поле p -адических чисел, приведите примеры.

Тема 3. Простое алгебраическое расширение конечного поля.

Цель занятия: основные понятия предваряющие понятие алгебраическое расширение, в том числе и само это определение, примеры алгебраических расширений.

Форма проведения – решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков.

Задания:

1. Докажите, что если число g составное, то функция является псевдонормой, т.е. она удовлетворяет свойствам
1) и 3) из определения 2.1, а также неравенству (10.1).
2. Докажите, что Q_{10} не является полем, предъявив делители нуля.
3. Рассмотрим следующую последовательность натуральных чисел: 6, 76, 376, 9376, 109376...

Докажите, что эту последовательность можно продолжить однозначно таким образом, чтобы получить 10-адическое число $a = \dots 109376$, удовлетворяющее уравнению $a^2 = a$.

4. Докажите, что уравнение $x^2 = x$ имеет в Z_{10} четыре корня, а именно 0, 1, a и β .

Найдите первые 6 цифр числа β .

5. Докажите, что $Z_{10} \cong Z_5 \otimes Z_2$ (прямое произведение групп).

Контрольные вопросы:

Метрики и нормы на поле p -адических чисел.

Теорема Островского.

Элементарные функции, определенные на поле p -адических чисел.

Тема 4. Поля разложение данного многочлена над конечным полем. Теорема существования.

Цель занятия: методы разложения многочлена над конечным полем

Форма проведения – решение типовых задач для закрепления и формирования знаний, умений, навыков.

Задания:

1. Докажите, что отображение непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в каждой точке.
2. Докажите, что непрерывный образ связного множества связан.
3. Верно ли, что если $f : A \rightarrow B$ — монотонное взаимно однозначное отображение двух замкнутых подмножеств W . Тогда f — гомеоморфизм.

Контрольные вопросы:

Теорема Островского.

Элементарные функции, определенные на поле p -адических чисел.

Нули p -адических степенных рядов

Свойства p -адических экспонент и логарифмов.
Локально постоянные функции.
Дифференцируемость p -адических чисел.

9.2. Методические рекомендации по подготовке письменных работ

Требования к подготовке и содержанию письменных работ (реферата, доклада):

1. Соответствие содержания теме и плану работы.
2. Полнота и глубина раскрытия основных понятий проблемы.
3. Достаточность фактов, позволяющих проиллюстрировать актуальность избранной проблемы, способы ее решения.
4. Работа с литературой, систематизация и структурирование материала.
5. Обобщение и сопоставление различных точек зрения по рассматриваемому вопросу.
6. Наличие и четкость выводов, резюме.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

АННОТАЦИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Конечные поля и их приложения к криптографии» реализуется на факультете информационных систем и безопасности кафедрой фундаментальной и прикладной математики.

Цель дисциплины: показать теорию и задачи, решаемые с её помощью имеющие богатое практическое применение в реальной практике работы в экономической сфере, технике и в задачах защиты информации.

Задачи дисциплины: в результате изучения дисциплины студенты должны владеть основными математическими понятиями курса; уметь решать типовые задачи, иметь навыки работы со специальной математической литературой, уметь использовать математический аппарат для решения теоретических и прикладных задач.

Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций:

- ПКУ-2. Способен выделять, формулировать возникающие в результате самостоятельной научной деятельности или деятельности научных, производственных, административных учреждений задачи или подзадачи для решения текущих проблем.

Знать: основные теоремы теории чисел, используемые в криптологии; основные теоретико-числовые алгоритмы; основные алгоритмы, реализующие арифметические операции в основных алгебраических структурах, используемых в криптографических приложениях;

Уметь: программно реализовывать основные теоретико-числовые и получисленные алгоритмы в криптографических приложениях; выполнять построение криптосистем на основе готовых криптографических библиотек; проводить математическое моделирование в криптологии; приводить математическое доказательство работоспособности предложенной криптосистемы;

Владеть: навыками работы с алгоритмами криптоанализа ассиметричных криптосистем.

По дисциплине предусмотрена промежуточная аттестация в форме экзамена.

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 4 зачетные единицы.

ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ

№	Текст актуализации или прилагаемый к РПД документ, содержащий изменения	Дата	№ протокола
1	Приложение к листу изменений №1	22.06.20	13

1. Структура дисциплины (п.2 для набора 2020г.)

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 4 з.е., 152 ч., в том числе контактная работа обучающихся с преподавателем 56 ч., промежуточная аттестация 18 ч., самостоятельная работа обучающихся 78 ч.

Таблица 1

№ п/п	Раздел дисциплины/темы	Семестр	Виды учебной работы (в часах)				Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			контактная		Промежуточная аттестация	Самостоятельная работа	
			Лекции	Практические занятия			
1	Определение колец и полей. Кольца без делителей нуля	8	2	4		8	
2	Конечные поля и кольца. Характеристика поля и кольца.	8	2	4		8	
3	Число элементов конечного поля. Поле вычетов по модулю p .	8	2	4		12	Опрос. Расчетно-графическая работа (РГР)
4	Кольцо многочленов из данного конечного поля. Теорема Безу. Неприводимость многочленов.	8	4	4		10	Рефераты, доклады
5	Простое алгебраическое расширение конечного поля.	8	4	4		8	
6	Поля разложение данного многочлена над конечным полем Теорема существования.	8	4	4		10	Коллоквиум
7	Теорема о существовании конечного поля числом элементов.	8	4	4		12	Защита РГР
8	Применение конечных полей в криптоалгоритмах.	8	2	4		10	Рефераты, доклады
9	Экзамен	8			18		Экзамен по билетам
	Итого:		24	32	18	78	

2. Образовательные технологии (к п.4 на 2020г.)

В период временного приостановления посещения обучающимися помещений и территории РГГУ для организации учебного процесса с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий могут быть использованы следующие образовательные технологии:

- видео-лекции;
- онлайн-лекции в режиме реального времени;
- электронные учебники, учебные пособия, научные издания в электронном виде и доступ к иным электронным образовательным ресурсам;
- системы для электронного тестирования;
- консультации с использованием телекоммуникационных средств.

3. Перечень современных профессиональных баз данных (БД) и информационно-справочных систем (ИСС) (к п. 6.2 на 2020г.)

Таблица 2

№ п/п	Наименование
1	Международные реферативные наукометрические БД, доступные в рамках национальной подписки в 2020 г. Web of Science Scopus
2	Профессиональные полнотекстовые БД, доступные в рамках национальной подписки в 2020 г. Журналы Cambridge University Press SAGE Journals Журналы Taylor and Francis
3	Компьютерные справочные правовые системы Консультант Плюс, Гарант

4. Перечень программного обеспечения (ПО) (к п.7 на 2020г.)

Таблица 3

№ п/п	Наименование ПО	Производитель	Способ распространения (лицензионное или свободно распространяемое)
1	Microsoft Office 2010 Pro	Microsoft	лицензионное
2	Windows XP/ Windows 7 / Windows 10	Microsoft	лицензионное
3	Kaspersky Endpoint Security	Kaspersky	лицензионное
4	Zoom	Zoom	лицензионное